A S. E. Il Generale L. Menabrea Senatore
omaggio dell'autore

MEMORIA

SULL' ATTRAZIONE DEGLI SFEROIDI

PER

REMIGIO DEL GROSSO

Professore nella R. Università di Napoli

NAPOLI

STABILIMENTO TIPOGRAFICO DELL' UNIONE

Strada Nuova Pizzofalcone, 14

1871

Allorchè si vuol rannodare al principio della gravitazione universale e quanto concerne la forma particolare de' corpi celesti, ed i fenomeni che si ravvisano ne' loro movimenti e nei movimenti dei fluidi che ricuoprono le loro superficie, è d' uopo cercare innanzi ad ogni altra cosa la risultante delle attrazioni che gli elementi di un corpo di figura sferoidica esercitano su di un punto.

Le prime investigazioni intorno a questo difficile problema si debbono a Newton, il quale nel 1° libro de' *Principî della Filosofia Naturale* determinò il potere attrattivo di un'ellissoide di rivoluzione ripiena di materia omogenea su di un punto collocato all'estremità di uno degli assi di figura. Le ricerche, che Mac-Laurin in seguito istituì sullo stesso argomento, furono coronate di miglior successo, poichè fruttarono la soluzione completa del problema che riguarda l' attrazione dell' ellissoide di rivoluzione su di un punto qualunque della sua superficie. Nelle nuove Memorie dell' Accademia di Berlino pel 1773 si trova un importante lavoro di Lagrange, nel quale la teorica di Mac-Laurin è estesa alla determinazione del potere attrattivo dell' ellissoide di rivoluzione su di un punto esterno collocato in uno dei piani principali. Ma la completa teorica dell' attrazione di un ellissoide di rivoluzione non si ebbe che nel 1785. La scienza ne va debitrice a Legendre.

La prima soluzione completa del problema che concerne l' attrazione dell' ellissoide a tre assi è dovuta a Laplace, come è dato rilevare dalle Mem. dell' Accademia delle Scienze di Parigi pel 1782. Questa soluzione però è implicata in lunghissimi calcoli. Ivory in seguito risolse con maggior semplicità lo stesso problema. Molte altre soluzioni del problema medesimo furono date in appresso, e molto più semplici ed eleganti della soluzione ottenuta da Laplace. Ci limiteremo a notare le più importanti, che si debbono a Poisson, Gauss, Dirichlet, Chasles ed Olindo Rodriguez. Meritano ancora speciale encomio i lavori di Cayley sullo stesso argomento.

Tutte queste ricerche però non erano sufficienti a risolvere la quistione che riguarda la figura de' corpi celesti. La densità di questi corpi non è uniforme, e la loro figura non è la figura ellissoidale. Quindi fu d'uopo istituire altre ricerche sull'attrazione degli sferoidi comprendendo in esse il concetto dell'eterogeneità delle masse, e non limitando la loro figura a quella dell'ellissoide. Però queste ricerche riuscirono infruttuose finchè il problema rimase nella sua generalità. Solo quando fu limitato all' attrazione di una massa eterogenea terminata da una superfi-

cie poco differente dalla sferica, il qual caso è presso a poco quello dei pianeti, si ottennero risultati non meno splendidi di quelli ottenuti nelle ricerche sull' attrazione dell'ellissoide di densità uniforme. Laplace si può riguardare come il creatore di questa teorica tanto importante nelle principali quistioni di Fisica Matematica. Mercè le così dette *funzioni sferiche* potè risolvere quel problema, che aveva reso vani tutti gli sforzi dei precedenti Geometri. Dopo di lui Gauss, Legendre, Jacobi, Liouville, Cayley han dato importantissime memorie sullo stesso argomento.

Il concetto del *potenziale* introdotto la prima volta nella scienza da Gauss e dal Geometra Inglese Giorgio Green ha giovato moltissimo a rendere più semplici ed eleganti le ricerche intorno all'attrazione degli sferoidi. E la scoperta di parecchie proprietà delle masse, che si attirano o si repellono, deve riguardarsi altresì come conseguenza dell'uso del medesimo concetto.

In questo scritto ci proponiamo di presentare ai giovani matematici nel modo più piano e semplice, che si è potuto, una esposizione della teorica dell' attrazione dei corpi terminati da superficie sferoidiche. Lo divideremo in due parti, nella prima delle quali tratteremo dell'attrazione degli sferoidi di densità uniforme, e nell'altra dell' attrazione dalle masse di variabile densità terminate da superficie poco differenti dalle superficie sferiche.

PARTE PRIMA

DELL' ATTRAZIONE DEGLI SFEROIDI DI DENSITA' UNIFORME.

CAPITOLO I.

Del potenziale di una massa rispetto ad un punto, e delle sue principali proprietà.

1° Rappresentino α, β, γ le coordinate rettangolari di un punto; x, y, z le coordinate di un elemento infinitesimale $d\mu$ di una data massa μ; D la distanza dei due punti (α, β, γ), (x, y, z), e quindi

$$D^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2:$$

ammettendo che ciascuna molecola di μ attragga il punto (α, β, γ) secondo la legge Newtoniana, sarà $\frac{k'^2 d\mu}{D^2}$ l' attrazione di $d\mu$ sul punto predetto, dinotando k'^2 l'attrazione che l' unità di massa eserciterebbe alla distanza $=1$ sul punto medesimo. I coseni degli angoli (xD), (yD), (zD) che la retta D forma coi tre assi delle coordinate si hanno dall' equazioni

$$\cos(xD)=\frac{x-\alpha}{D}, \quad \cos(yD)=\frac{y-\beta}{D}, \quad \cos(zD)=\frac{z-\gamma}{D},$$

e quindi le componenti dell'attrazione di $d\mu$ parallele ai medesimi assi sono

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{k'^2(x-\alpha)d\mu}{D^3} &= k'^2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{D}\right)d\mu \\ \frac{k'^2(y-\beta)d\mu}{D^3} &= k'^2\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{D}\right)d\mu \\ \frac{k'^2(z-\gamma)d\mu}{D^3} &= k'^2\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{D}\right)d\mu. \end{aligned}$$

Gl'integrali di queste tre espressioni estesi a tutta la massa μ porgono le componenti dell'attrazione che questa massa esercita sul punto (α, β, γ). Dinotandole con X, Y, Z e ponendo per brevità

$$(2)\qquad V=\int\frac{d\mu}{D},$$

si ottiene evidentemente

$$(3)\qquad X=k'^2\frac{dV}{d\alpha},\quad Y=k'^2\frac{dV}{d\beta},\quad Z=k'^2\frac{dV}{d\gamma}.$$

La funzione V si denomina il *potenziale* della massa μ rispetto al punto (α, β, γ).

Sia l la distanza del punto (α, β, γ) sull'origine delle coordinate; r la distanza dal punto (x, y, z) dalla stessa origine; φ l'angolo che comprendono queste due rette, ed avremo

$$D^2=l^2-2lr\cos\varphi+r^2.$$

Posto $r=pl$, e $\Delta^2=1-2p\cos\varphi+p^2$, si ha pure $D=l\Delta$; onde la (2) si traduce in

$$(4)\qquad lV=\int\frac{d\mu}{\Delta}.$$

Inoltre dalla (2) ricavasi

$$(5)\qquad l^2\frac{dV}{d\alpha}=\int\left(\frac{x}{l}-\frac{\alpha}{l}\right)\frac{d\mu}{\Delta^3},\quad l^2\frac{dV}{d\beta}=\int\left(\frac{y}{l}-\frac{\beta}{l}\right)\frac{d\mu}{\Delta^3},\quad l^2\frac{dV}{d\gamma}=\int\left(\frac{z}{l}-\frac{\gamma}{l}\right)\frac{d\mu}{\Delta^3}.$$

Ponendo $l=\infty$ nelle (4) e (5) si ottiene

$$\lim. lV=-\frac{\lim. l^2\frac{dV}{d\alpha}}{\cos(lx)}=-\frac{\lim. l^2\frac{dV}{d\beta}}{\cos(ly)}=-\frac{\lim. l^2\frac{dV}{d\gamma}}{\cos(lz)}=\mu.$$

2° Allorchè nel secondo membro della (2) l' integrazione si è estesa a tutta la massa μ, il potenziale si riduce ad una funzione delle sole coordinate (α, β, γ). Supponiamo ora che abbiasi l'equazione $V=c$, dinotando c una costante: è chiaro che se le coordinate α, β, γ si considerano come variabili, l'equazione $V=c$ rappresenta una superficie. I coseni degli angoli, che la normale condotta a questa superficie nel punto (α, β, γ) forma coi tre assi delle coordinate, si dinotino per f, g, h, e sarà

$$\cos f = \pm \frac{1}{W}\frac{dV}{d\alpha}\,; \quad \cos g = \pm \frac{1}{W}\frac{dV}{d\beta}\,; \quad \cos h = \pm \frac{1}{W}\frac{dV}{d\gamma}\,,$$

dove per brevità si è posto

$$W = \sqrt{\frac{dV^2}{d\alpha^2} + \frac{dV^2}{d\beta^2} + \frac{dV^2}{d\gamma^2}}.$$

Ora se dinotiamo con R la risultante di X, Y, Z, dalle (3) si deduce

$$(6) \qquad \frac{X}{R} = \pm \frac{1}{W}\frac{dV}{d\alpha} = \cos f\,; \quad \frac{Y}{R} = \pm \frac{1}{W}\frac{dV}{d\beta} = \cos g\,; \quad \frac{Z}{R} = \pm \frac{1}{W}\frac{dV}{d\gamma}\cos h.$$

Dunque l'attrazione totale di μ sul punto (α, β, γ) si esercita secondo la normale condotta per lo stesso punto alla superficie $V=c$. Questa superficie dallo Chasles è stata denominata *superficie di livello*.

L'equazioni (6) sono vere per qualunque direzione degli assi coordinati, purchè questi rimangano rettangolari. Supponendo che l' asse delle x diventi parallelo alla normale N condotta nel punto (α, β, γ) alla superficie di livello, e che gli assi delle y e z diventino paralleli a due altre rette perpendicolari fra loro ed alla stessa normale, avremo $\cos f=1$, $\cos g=0$, $\cos h=0$; e quindi in seguito delle (3)

$$R = k'^2 \frac{dV}{dN}\,,$$

dinotando $\frac{dV}{dN}$ la derivata di V rispetto alla normale predetta.

Le superficie di livello godono delle seguenti proprietà: — I. Due masse che hanno le stesse superficie di livello esercitano la stessa attrazione sullo stesso punto dello spazio, fatta astrazione da un fattore costante. — II. Due superficie di livello relative alla stessa massa non possono avere alcun punto comune. Imperocchè le due equazioni simultanee $V=c$, $V=c'$ non possono avere alcuna soluzione comune quando c e c' sono quantità diverse — III. Le superficie di livello sono superficie chiuse. Difatti V è una funzione continua di α, β, γ, e diventa $=0$ quando il punto attirato va all' infinito. Ed in questo caso la superficie di livello diventa una sfera di raggio infinito, che non ha il centro all'infinito.

3° Se ρ rappresenta la densità di μ nel punto (x, y, z), si ha, come è noto,

$d\mu = \rho dx dy dz$. Ora supponiamo che la densità ρ sia la stessa in tutti i punti della massa μ: facendo attenzione alle (1) e (3) avremo

$$X = k^2 \rho \int\int\int \frac{(x-a) dx dy dz}{D^3} = -k^2 \rho \int\int \frac{dy dz}{D};$$

e per conseguenza

$$(7) \qquad -\frac{dV}{da} = \rho \int\int \frac{dy dz}{D}.$$

Nel secondo membro di questa equazione x, y, z, D si riferiscono ai soli punti collocati sulla superficie S, dalla quale è limitata la massa μ. Se dinotiamo con dS l'elemento differenziale di questa superficie posto in (x, y, z), sarà $dydz$ la sua proiezione nel piano (yz). Quindi avremo $dydz = dS\cos(xN)$ dinotando (xN) l'angolo che la normale condotta ad S nel punto (x, y, z) forma con l'asse della x; e la (7) si traduce in

$$(8) \qquad -\frac{dV}{da} = \rho \int \frac{dS}{D} \cos(xN).$$

Inoltre se dal punto (α, β, γ) si fa partire una piramide infinitamente sottile, la quale abbia D per asse; e facendo centro lo stesso punto, si descrivono due sfere coi raggi $D, D+dD$: il volume dell'elemento $d\mu$ si trova equivalente al volume della parte che le due sfere intercettano sulla piramide. In altri termini, se con $d\Sigma$ si dinota l'elemento della superficie sferica di raggio D intercetto dalla piramide in discorso, si ha

$$d\mu = \rho dD d\Sigma.$$

Ma $dydz$ è la proiezione di $d\Sigma$ nel piano (yz). Laonde risulta $\cos(xD) d\Sigma = dydz$, e la (7) si trasforma ancora nella seguente equazione

$$-\frac{dV}{da} = \rho \int \frac{d\Sigma}{D} \cos(xD).$$

Ma essendo dS l'elemento della superficie S contenuto nella stessa piramide, $d\Sigma$ è la proiezione di questo elemento sulla sfera di raggio D. Dunque

$$d\Sigma = dS\cos(DN),$$

e per conseguenza

$$(9) \qquad -\frac{dV}{da} = \rho \int \frac{dS}{D} \cos(DN)\cos(xD).$$

Dinotando con $d\sigma$ l'elemento di superficie sferica di raggio $=1$, e di centro (α, β, γ) compreso nella predetta piramide, si ha

$$(10) \qquad d\Sigma = D^2 d\sigma = dS\cos(DN).$$

Mediante questa relazione il potenziale V si traduce in

$$V=\rho\int\int DdDd\sigma=\frac{\rho}{2}\int D^2d\sigma=\frac{\rho}{2}\int dS\cos(DN).$$

Ora siano F, G, H gli angoli che la normale condotta nel punto (x, y, z) di S fa coi tre assi delle coordinate; ed essendo

$$\cos(DN)=\frac{1}{D}\Big[(x-\alpha)\cos F+(y-\beta)\cos G+(z-\gamma)\cos H\Big]$$

si trova

$$V=\frac{\rho}{2}\int\frac{dS}{D}\Big[(x-\alpha)\cos F+(y-\beta)\cos G+(z-\gamma)\cos H\Big]. \tag{11}$$

4° Nella ipotesi di ρ variabile la funzione V e le sue derivate rispetto ad α, β, γ si traducono in

$$V=\int\int\rho DdDd\sigma, \tag{12}$$

$$\frac{dV}{d\alpha}=\int\int\rho\cos(xD)dDd\sigma;\quad \frac{dV}{d\beta}=\int\int\rho\cos(yD)dDd\sigma;$$

(13)

$$\frac{dV}{d\gamma}=\int\int\rho\cos(zD)dDd\sigma.$$

Quest'integrali non diventano infiniti per qualunque valore di D, anche quando fosse D=0. Ma accade lo stesso delle seconde derivate di V rispetto alle coordinate del punto attratto? Poichè si ha

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}=\int\int\int\Big[\frac{3(x-\alpha)^2}{D^2}-1\Big]\frac{\rho dxdydz}{D^3}=\int\int\Big[3\cos^2(xD)-1\Big]\frac{\rho dDd\sigma}{D};$$

(14)

$$\frac{d^2V}{d\beta^2}=\int\int\Big[3\cos^2(yD)-1\Big]\frac{\rho dDd\sigma}{D};\quad \frac{d^2V}{d\gamma^2}=\int\int\Big[3\cos^2(zD)-1\Big]\frac{\rho dDd\sigma}{D},$$

i secondi membri di quest'equazioni rimangono quantità finite per tutti i punti dello spazio posti fuori di S, ovveramente per qualunque posizione possa avere il punto attirato quando è posto fuori di questa superficie. Se poi questo punto fa parte della massa attraente, allora per $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ risulta D=0, ed i secondi membri delle (14) diventano (almeno apparentemente) infiniti. Mediante l'equazioni (13) però possiamo dimostrare che le derivate di second'ordine di V rispetto ad α, β, γ sono quantità finite anche quando questo punto fa parte della massa μ. Di fatti supponiamo circoscritta al punto (α, β, γ) una sfera di raggio in-

finitamente piccolo: potremo considerare la porzione di massa compresa in questa sfera di densità costante, che dinoteremo per ρ_1. In tale ipotesi il potenziale V sarà la somma di due altri potenziali V_1, V_2, il primo dei quali è relativo alla piccola sfera, e l'altro al resto della massa μ; e ponendo attenzione alle (13) avremo

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}=\frac{d^2V_2}{d\alpha^2}+\rho_1\int\int d\frac{dD_1}{d\alpha}\cos(xD_1)d\sigma=\frac{d^2V_2}{d\alpha}+\rho_1\int\frac{dD_1}{d\alpha}\cos(xD_1)d\sigma$$

Ma $\frac{d^2V_2}{d\alpha^2}$ si riferisce alla parte della massa che non contiene il punto attirato μ, ed è quantità finita; onde essendo pure tale $\frac{dD_1}{d\alpha}$ comunque sia piccolo D_1, poichè

$$\frac{dD_1}{d\alpha}=-\cos(xD_1),$$

sarà necessariamente quantità finita anche $\frac{d^2V}{d\alpha^2}$. Lo stesso è da dirsi di $\frac{d^2V}{d\beta^2}$, $\frac{d^2V}{d\gamma^2}$.

Addizionando l'equazioni (14), e supponendo il punto attirato non far parte della massa μ risulta

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=0.$$

Ove poi il punto attirato fa parte di μ, si ha evidentemente

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=\frac{d^2V_2}{d\alpha^2}+\frac{d^2V_2}{d\beta^2}+\frac{d^2V_2}{d\gamma^2}-4\pi\rho_1\ ,$$

ovveramente

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=-4\pi\rho_1\ ,$$

essendo nullo il trinomio $\frac{d^2V_2}{d\alpha^2}+\frac{d^2V_2}{d\beta^2}+\frac{d^2V_2}{d\gamma^2}$, poichè si riferisce alla parte della massa μ, nella quale non è contenuto il punto attirato.

Dall'analisi fatta sin qui risultano le seguenti cose — 1° Il potenziale V di una massa qualunque è una funzione finita delle coordinate del punto attirato; si annulla quando questo punto è a distanza infinita; e moltiplicando V pel raggio vettore del punto attirato si ha sempre una quantità finita. — 2° Le derivate prime di V rispetto alle coordinate del punto attirato sono funzioni finite delle coordinate stesse; si annullano quando il punto attirato è a distanza infinita; ma i loro prodotti pel quadrato del raggio vettore del punto medesimo serbano sempre un valore finito. — 3° Le derivate di 2° ordine del potenziale V sono quantità finite, e verificano l'equazione $\Delta^2V=0$, $-4\pi\rho_1$, secondo che il punto attirato è estraneo alla massa attraente o fa parte di essa. Qui si pone per brevità

$$\Delta^2V=\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}.$$

5° Una stessa massa rispetto ad un dato punto non può ammettere che un solo potenziale. Ed in vero supponiamo che la massa μ possa ammettere due potenziali diversi V, V' rispetto allo stesso punto (α, β, γ): ponendo $V-V'=P$, ed essendo $\Delta^2 V=\Delta^2 V'$ tanto se questo punto è esterno, quanto se fa parte di μ, sarà $\Delta^2 P=0$, e quindi

$$\int\int\int P\Delta^2 P dx dy dz=0.$$

Essendo P quantità finita potremo integrare per parti, ed estendere l'integrazione a determinati limiti. Ora l'integrazione per parti ci dà

$$0=\int\left[\frac{dP}{dx}\cos(Dx)+\frac{dP}{dy}\cos(Dy)+\frac{dP}{dz}\cos(Dz)\right]Pd\Sigma$$

$$-\int\int\int\left(\frac{dP^2}{dx^2}+\frac{dP^2}{dy^2}+\frac{dP^2}{dz^2}\right)dx dy dz,$$

ed anche più semplicemente

$$0=\int P\frac{dP}{dD}d\Sigma-\int\int\int\left(\frac{dP^2}{dx^2}+\frac{dP^2}{dy^2}+\frac{dP^2}{dz^2}\right)dx dy dz.$$

Ma $l^3 P\frac{dP}{dD}$ è sempre quantità finita; onde potremo determinare una costante K per modo che abbiasi sempre

$$\int P\frac{dP}{dD}d\Sigma<\frac{K}{l^3}\int d\Sigma,$$

qualunque siano i limiti ai quali si estenda l'integrale $P\frac{dP}{dD}$, che è nel primo membro di questa ineguaglianza. Fra i limiti $-l$, e $+l$ si ha

$$\int\left(P\frac{dP}{dD}\right)_{-l}^{l}d\Sigma<\frac{2K}{l}\int d\sigma,$$

e per $l=\infty$ viene

$$\int\left(P\frac{dP}{dD}\right)_{-\infty}^{\infty}d\Sigma=0.$$

In conseguenza

$$\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dP^2}{dx^2}+\frac{dP^2}{dy^2}+\frac{dP^2}{dz^2}\right)dx dy dz=0.$$

Siccome $\frac{dP}{dx}, \frac{dP}{dy}, \frac{dP}{dz}$ sono quantità finite, così questa equazione non può esser vera se non che quando si ha

$$\frac{dP}{dx}=0, \quad \frac{dP}{dy}=0, \quad \frac{dP}{dz}=0.$$

il che importa che P sia una quantità costante. Ma ad $l=\infty$ corrispondono $V=0$, $V'=0$, Dunque anche $P=0$, come doveva dimostrarsi. Questo teorema è dovuto a Dirichlet.

6° Continuando a dinotare l la distanza del punto (α, β, γ) dall'origine delle coordinate, sia θ l'angolo che l forma con l'asse delle z, $\tilde{\omega}$ l'angolo che la projezione di l nel piano (x, y) forma con l'asse delle x, ed avremo

$$\alpha = l\,\mathrm{sen}\theta\cos\tilde{\omega}\,, \quad \beta = l\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\tilde{\omega}\,, \quad \gamma = l\cos\theta.$$

In seguito di queste relazioni si ottiene

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{dV}{dl}\frac{dl}{d\alpha} + \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{d\alpha} + \frac{dV}{d\tilde{\omega}}\frac{d\tilde{\omega}}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{d^2V}{dl^2}\frac{dl^2}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\theta^2}\frac{d\theta^2}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\tilde{\omega}^2}\frac{d\tilde{\omega}^2}{d\alpha^2}$$

$$+2\frac{d^2V}{dld\theta}\frac{dl}{d\alpha}\frac{d\theta}{d\alpha} + 2\frac{d^2V}{dld\tilde{\omega}}\frac{dl}{d\alpha}\frac{d\tilde{\omega}}{d\alpha} + 2\frac{d^2V}{d\theta d\tilde{\omega}}.\frac{d\theta}{d\alpha}\frac{d\tilde{\omega}}{d\alpha}$$

$$+\frac{dV}{dl}\frac{d^2l}{d\alpha^2} + \frac{dV}{d\theta}\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} + \frac{dV}{d\tilde{\omega}}\frac{d^2\tilde{\omega}}{d\alpha^2}.$$

Simili espressioni risultano per $\frac{d^2V}{d\beta^2}, \frac{d^2V}{d\gamma^2}$. Sostituendo questi valori in

$$\Delta^2V = \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2},$$

con facili riduzioni si perviene al seguente risultato

$$\Delta^2V = \frac{d^2V}{dl^2} + \frac{1}{l^2}\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{1}{l^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{d^2V}{d\tilde{\omega}^2} + \frac{2}{l}\frac{dV}{dl} + \frac{\cot\theta}{l^2}\frac{dV}{d\theta}.$$

Moltiplicando per l^2, e ponendo $\cos\theta = \nu$, si ha

$$l^2\Delta^2V = l\,\frac{d^2lV}{dl^2} + \frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dV}{d\nu}\right] + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2V}{d\tilde{\omega}^2},$$

come può agevolmente verificarsi. Laonde secondo che il punto attirato è posto fuori della massa attraente, o fa parte di questa massa, si ha

$$l\frac{d^2.lV}{dl^2} + \frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dV}{d\nu}\right] + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2V}{d\tilde{\omega}^2} = 0,\ -4\pi\rho_1 l^2. \tag{15}$$

Questa trasformazione di Δ^2V è dovuta a Laplace.

2

CAPITOLO II.

Formole pel calcolo del potenziale di una massa di uniforme densità.

7° Supponiamo che debba determinarsi l'integrale

$$(1) \qquad P=\frac{2}{\pi}\int_0^{\mu}\cos\omega u\,du\int_a^b F(t)\cos ut\,dt\,,$$

dove sia $b>a>0$, $\mu=\infty$, e $F(t)$ una funzione della variabile t continua e finita tra i limiti $t=a$, $t=b$. Invertendo le integrazioni nella (1) si ottiene

$$P=\frac{1}{\pi}\int_a^b F(t)dt\int_0^{\mu}2\cos\omega u\cos ut\,du\,,$$

ovveramente

$$\pi P=\int_a^b\frac{\operatorname{sen}\mu(t-\omega)}{t-\omega}F(t)\,dt+\int_a^b\frac{\operatorname{sen}\mu(t+\omega)}{t+\omega}F(t)dt;$$

Poniamo nel primo integrale $t-\omega=\theta$, e nel secondo poniamo $t+\omega=\theta$, ed avremo

$$\pi P=\int_{a-\omega}^{b-\omega}\frac{\operatorname{sen}\mu\theta}{\theta}F(\omega+\theta)d\theta+\int_{a+\omega}^{b+\omega}\frac{\operatorname{sen}\mu\theta}{\theta}F(\omega-\theta)dt,$$

equazione che si traduce in

$$(2) \qquad \pi P=\int_{\mu(a-\omega)}^{\mu(b-\omega)}\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}F\left(\omega+\frac{\lambda}{\mu}\right)d\lambda+\int_{\mu(a+\omega)}^{\mu(b+\omega)}\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}F\left(\omega-\frac{\lambda}{\mu}\right)d\lambda$$

quando si pone $\lambda=\mu\theta$. Escludendo tutte le altre ipotesi rispetto ai valori di a, b, ω, e ritenendo soltanto $a<\omega<b$, se per compendio di scrittura si pone

$$v_1=\mu(b-\omega)\,,\quad v=\mu(\omega-a)\,;\quad v'_1=\mu(b+\omega),\quad v'=\mu(\omega+a)\,,$$

la (2) diventa

$$\pi P=\int_{-v}^{v_1}\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}F\left(\omega+\frac{\lambda}{\mu}\right)d\lambda+\int_{v'}^{v'_1}\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}F\left(\omega-\frac{\lambda}{\mu}\right)d\lambda.$$

Nella supposizione di $\mu=\infty$, i limiti v, v_1, v', v'_1 diventano ancora essi infiniti; onde risulta

$$\pi P=F(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}d\lambda=\pi F(\omega).$$

Laonde la (1) in questa ipotesi diventa

(3) $$F(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega u du\int_a^b F(t)\cos utdt.$$

Questa formola è dovuta a Fourier. Ove poi ω non fosse contenuto fra a e b, vengono v e v_1 di segni contrari; e quindi per $\mu=\infty$ risulta

$$\pi P=F(\omega)\int_\infty^\infty \frac{\mathrm{sen}\lambda}{\lambda}d\lambda=0.$$

8° Allorchè nell' integrale

$$S=\int\int\int F[\varphi(x,y,z)]f(x,y,z)dxdydz$$

debbono estendersi le integrazioni a tutti quei valori di x, y, z che verificano la condizione

(4) $$a<\varphi(x,y,z)<b,$$

ponendo $\varphi(x,y,z)=\omega$, viene

$$S=\int\int\int F(\omega)f(x,y,z)dxdydz,$$

equazione che in seguito della (3) si traduce in

(5) $$S=\frac{2}{\pi}\int\int\int f(x,y,z)dxdydz\int_0^\infty \cos\omega u du\int_a^b F(t)\cos utdt.$$

Questa equazione è vera sempre nella ipotesi di $0<a<b$. Inoltre la triplice integrazione indicata sul principio del secondo membro di questa equazione deve essere estesa a tali valori limiti x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 di x, y, z che soddisfacciano alla condizione (4). Ora io dico che se X_1, X_2; Y_1, Y_2; Z_1, Z_2 sono tali valori, che verificano le condizioni

$$X_1<x_1<x_2<X_2$$
$$Y_1<y_1<y_2<Y_2$$
$$Z_1<z_1<z_2<Z_2$$

nella triplice integrazione anzidetta si possono ai limiti x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 sostituire i limiti X_1, X_2; Y_1, Y_2; Z_1, Z_2, senza che questi soddisfacciano alla condizione (4). Ed in vero in questa ipotesi sia S_1 ciò che diventa S, e sarà

$$S_1=\int_{X_1}^{X_2}\int_{Y_1}^{Y_2}\int_{Z_1}^{Z_2} f(x,y,z)F(\omega)dxdydz.$$

Ora essendo in generale

$$\int_{X_1}^{X_2}=\int_{X_1}^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\int_{x_2}^{X_2},$$

l'espressione di S_1 si può decomporre in nove parti, in una sola delle quali si verifica essere $a<\omega<b$, e nelle altre ω non è mai contenuta fra a e b. Queste otto parti dunque svaniranno, e resterà la sola parte di S_1 che è uguale ad S.

La quantità X_1, X_2; Y_1, Y_2; Z_1, Z_2 possono essere qualunque, purchè verifichino le condizioni (6). Quindi purchè sia $a<\omega<b$, all'equazione (5) potremo sostituire l'equazione

$$\text{(7)}\qquad S=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)dxdydz\int_{0}^{\infty}\cos\omega\, udu\int_{a}^{b}F(t)\cos utdt.$$

9° È utile contemplare il caso nel quale si ha $F(t)$ costante, che per maggior semplicità supppremo $=1$. In questa ipotesi risulta

$$\int_{a}^{b}F(t)\cos utdt=\frac{\operatorname{sen}bu-\operatorname{sen}au}{u},$$

e la (7) si traduce in

$$S=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)dxdydz\int_{0}^{\infty}\cos\omega udu\left(\frac{\operatorname{sen}bu-\operatorname{sen}au}{u}\right).$$

Quindi se per un caso particolare si ha $a=0$, $b=1$, e per conseguenza

$$0<\varphi(x,y,z)<1\ ,$$

la precedente espressione di S si traduce in

$$\text{(8)}\qquad S=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)dxdydz\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\cos\omega udu,$$

che è la formola adoperata del Dirichelet pel calcolo del potenziale. Di fatti basta supporre

$$f(x,y,z)=[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r},$$

$$F[\varphi(x,y,z)]=1,$$

e la proposta espressione di S nel n° 8° diventa

$$S=\int\int\int\frac{dxdydz}{r}=\frac{\Lambda}{\rho},$$

quando la densità della massa attraente è uniforme. E l'ineguaglianza

$$0<\varphi(x,y,z)<1$$

è la condizione, a cui debbono soddisfare le coordinate dei singoli punti della massa attraente, affinchè il valore del potenziale possa calcolarsi mercè l' equazione seguente

$$(9)\qquad V=\frac{2\rho}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdydz}{r}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}u\cos\omega u}{u}du.$$

A questa equazione però bisogna far subire una trasformazione, che riesce di molta importanza nelle cose che andremo a svolgere in appresso.

10° Consideriamo l' integrale definito

$$(10)\qquad Q=\int_{0}^{\infty}e^{-(1+i\nu)\psi}\psi^{m-1}d\psi,$$

nel quale ν dinoti una quantità indipendente da ψ, i la radice immaginaria dell' unità, ed m un numero >0. Derivando rispetto a ν si ottiene

$$\frac{dQ}{d\nu}=-i\int_{0}^{\infty}e^{-(1+i\nu)\psi}\psi^{m}d\psi;$$

ed eseguendo l' integrazione per parti nel secondo membro di questa equazione risulta

$$\frac{dQ}{d\nu}=-\frac{im}{1+i\nu}\int_{0}^{\infty}e^{-(1+i\nu)\psi}\psi^{m-1}d\psi.$$

Quindi in seguito della (10) si deduce

$$\frac{dQ}{Q}=-\frac{imd\nu}{1+i\nu},$$

equazione che ha per integrale

$$Q=\frac{C}{(1+i\nu)^{m}},$$

dinotando C una costante arbitraria. Siccome questa equazione è vera per qualunque valore di ν, sarà ancor vera quando $\nu=0$. Ma in questa ipotesi la (10) porge

$$Q=\int_{0}^{\infty}e^{-\psi}\psi^{m-1}d\psi;$$

onde se il secondo membro di questa equazione si dinota col solito simbolo $\Gamma(m)$ avremo

$$C=\Gamma(m),$$

e conseguentemente

$$\int_0^\infty e^{-(1+iv)\psi}\psi^{m-1}d\psi=\frac{\Gamma(m)}{(1+iv)^m}.$$

Questa equazione si trasforma in

$$\int_0^\infty e^{-(a+ib)\psi}\psi^{m-1}d\psi=\frac{\Gamma(m)}{(a+ib)^m}$$

quando si pone $v=\frac{b}{a}$, e si cangia ψ in $a\psi$. Ora si faccia $a=0$, e si avrà

$$\int_0^\infty e^{-ib\psi}\psi^{m-1}d\psi=\frac{\Gamma(m)}{b^m}i^{-m}.$$

Ma dall'equazione

$$(11)\qquad e^{i\chi}=\cos\chi+i\,\mathrm{sen}\,\chi,$$

ricavasi manifestamente $e^{\frac{i\pi}{2}}=i$. Dunque cangiando i in $-i$ troveremo

$$\int_0 e^{ib\psi}\psi^{m-1}d\psi=\frac{\Gamma(m)}{b^m}e^{\frac{im\pi}{2}}$$

Finalmente quando $m=\frac{1}{2}$, questa equazione diviene

$$(12)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{ib\psi}}{\sqrt{\psi}}d\psi=e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

essendo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. E se si pone

$$\psi=\left(w+\frac{c}{b}\right)^2$$

si ha evidentemente

$$(13)\qquad 2\int_0^\infty e^{i(bw^2+2cw)}dw=\sqrt{\frac{\pi}{b}}\;e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{c^2}{b}\right)}$$

11° Se nella equazione (12) supponiamo

$$b=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

si ottiene

$$\frac{1}{r}=\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{ir^2\psi}\,d\psi}{\sqrt{\psi}}$$

Sostituendo questo valore di $\frac{1}{r}$ nella (9) viene

$$V=\frac{2\rho}{\pi}\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u \cos \omega u}{u}\,du\int_0^\infty \frac{e^{ir^2\psi}\,d\psi}{\sqrt{\psi}}$$

Da ultimo ponendo attenzione alla (11) potremo tradurre questa equazione in

$$(14)\qquad V=\frac{2\rho}{\pi}\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du\int_0^\infty \frac{e^{i(\omega u+v^2\psi)}\,d\psi}{\sqrt{\psi}},$$

dove però, dovendo V essere quantità reale, si comprende agevolmente che il suo vero valore si riduce alla parte reale del secondo membro di questa equazione. E non vogliamo omettere di rammentare che ciò ha luogo quando le coordinate dei singoli punti della massa attraente verificano la condizione $0<\omega<1$, dove

$$(15)\qquad \omega=\varphi(x, y, z)$$

CAPITOLO III.

Attrazione di una massa di densità uniforme terminata da una superficie chiusa di 2° grado.

12° Dinotiamo con

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1$$

l'equazione della superficie di 2° grado che termina la massa μ, di cui vogliamo calcolare l'attrazione sul punto (α, β, γ). Poichè in questa ipotesi le coordinate (x, y, z) dei singoli punti della massa proposta debbono verificare la condizione

$$0<\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}<1\ ,$$

potremo supporre

$$\omega=1-\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\right),$$

ed avremo

$$\omega u+r^2\psi=u+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\psi-2(\alpha x+\beta y+\gamma z)\psi$$

$$+\left(\psi-\frac{u}{A^2}\right)x^2+\left(\psi-\frac{u}{B^2}\right)y^2+\left(\psi-\frac{u}{C^2}\right)z^2.$$

Se per brevità si suppone

$$(2)\qquad \begin{aligned} p&=u+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\psi\\ q&=\left(\psi-\frac{u}{A^2}\right)x^2-2\alpha\psi x\\ q_1&=\left(\psi-\frac{u}{B^2}\right)y^2-2\beta\psi y\\ q_2&=\left(\psi-\frac{u}{C^2}\right)z^2-2\gamma\psi z,\end{aligned}$$

questa equazione si traduce in

$$\omega u+r^2\psi=p+q+q_1+q_2\,,$$

onde sostituendo nella (14) del capitolo precedente risulta

$$(3)\qquad V=\frac{2\rho}{\pi}\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\frac{}{\pi}}}\int_0^\infty\frac{\text{sen}\,u}{u}du\int_0^\infty\frac{e^{ip}d\psi}{\sqrt{\psi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{q}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{q_1}dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{q_2}dz$$

potendosi invertire le integrazioni.

I valori degl'integrali

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}e^{q}dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{q_1}dy,\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{q_2}dz$$

si possono ottenere agevolmente. Identificando q con bw^2+2cw, bisogna porre $w=x$, $b=\psi-\frac{u}{A^2}$, $c=-\alpha\psi$; onde in seguito della equazione (13) del capitolo precedente si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{q}dx=\sqrt{\frac{A^2\pi}{A^2\psi-u}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A^2\alpha^2\psi^2}{A^2\psi-u}\right)}.$$

Similmente viene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{q_1} dy = \sqrt{\frac{B^2\pi}{B^2\psi - u}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B^2\beta^2\psi^2}{B^2\psi - u}\right)},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{q_2} dz = \sqrt{\frac{C^2\pi}{C^2\psi - u}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C^2\gamma^2\psi^2}{C^2\psi - u}\right)}.$$

Laonde dinotando con U il prodotto dei tre integrali (4), avremo

$$\text{(5)} \qquad U = \frac{ABC\pi^{\frac{3}{2}} e^{iR + \frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{(A^2\psi - u)(B^2\psi - u)(C^2\psi - u)}},$$

dove per brevità si è posto

$$\text{(6)} \qquad R + \frac{A^2\alpha^2\psi^2}{A^2\psi - u} + \frac{B^2\beta^2\psi^2}{B^2\psi - u} + \frac{C^2\gamma^2\psi^2}{C^2\psi - u} = 0.$$

In seguito della (5) l'equazione (3) diventa con facili riduzioni

$$\text{(7)} \qquad V = 2ABC\rho i \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du \int_0^{\infty} \frac{e^{i(p+R)}\, d\psi}{\sqrt{(A^2\psi - u)(B^2\psi - u)(C^2\psi - u)}\,\psi}$$

La prima equazione (2) e la (6) porgono

$$p + R = u\left[1 - \frac{\alpha^2\psi}{A^2\psi - u} - \frac{\beta^2\psi}{B^2\psi - u} - \frac{\gamma^2\psi}{C^2\psi - u}\right];$$

e se mutiamo u in $-u$, e poscia poniamo $\psi t = u$,

$$T = 1 - \frac{\alpha^2}{A^2 + t} - \frac{\beta^2}{B^2 + t} - \frac{\gamma^2}{C^2 + t},$$

la (7) diventa

$$V = 2ABC\rho i \int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{sen} u\, du}{u^2} \int_{\infty}^{0} \frac{e^{-iuT}\, dt}{\sqrt{(A^2 + t)(B^2 + t)(C^2 + t)}},$$

ovveramente

$$V=-2iABC\rho\int_0^{-\infty}\frac{\text{sen}u\,e^{-iuT}}{u^2}du\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{H}}. \tag{8}$$

Qui per brevità si è posto

$$H=(A^2+t)(B^2+t)(C^2+t).$$

Ora si osservi che il vero valore del potenziale è la parte reale del secondo membro della (8). Ponendo dunque $\cos uT - i\,\text{sen}\,uT$ in luogo dell' esponenziale e rigettando nel secondo membro la parte immaginaria avremo, invertendo le integrazioni ,

$$V=-2ABC\rho\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{H}}\int_0^{-\infty}\frac{\text{sen}u\,\text{sen}uT}{u^2}du.$$

Quando T è <1, si ha (n° 9°)

$$\int_0^{-\infty}\frac{\text{sen}u\cos uT}{u}du=-\frac{1}{2}\pi;$$

e conseguentemente moltiplicando per dT ed integrando fra i limiti $T=0$, $T=T$

$$\int_0^T dT\int_0^{-\infty}\frac{\text{sen}u\cos uT}{u}du=\int_0^{-\infty}\frac{\text{sen}u\,\text{sen}uT}{u^2}du=-\frac{1}{2}T\pi.$$

Dunque nella ipotesi di $T<1$ si ottiene pel potenziale

$$V=\pi ABC\rho\int_0^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha^2}{A^2+t}-\frac{\beta^2}{B^2+t}-\frac{\gamma^2}{C^2+t}\right)dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)(C^2+t)}}. \tag{9}$$

13. Premesse queste cose, supponiamo primieramente che il punto attirato (α, β, γ) faccia parte della massa attraente μ. Siccome per tutti i punti di questa massa deve aver luogo la condizione

$$0<\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}<1,$$

così sarà anche pel punto (α, β, γ), onde avremo

$$0<\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{A^2}+\frac{\gamma^2}{C^2}<1,$$

ed a maggior ragione

$$0<\frac{\alpha^2}{A^2+t}+\frac{\beta^2}{B^2+t}+\frac{\gamma^2}{C^2+t}<1\,,$$

poichè t è sempre quantità positiva. La condizione $T<1$ è dunque verificata quando il punto attirato fa parte della massa attraente, ed il valore del potenziale è determinato dall' equazione (9). In seguito delle (3) del capitolo I le componenti dell' attrazione della massa μ sul punto (α, β, γ) parallele ai tre assi delle coordinate saranno date dalle seguenti equazioni

$$(10)\qquad \begin{aligned} X&=-\frac{3}{2}k'^2\mu\alpha\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(A^2+t)^3(B^2+t)(C^2+t)}} \\ Y&=-\frac{3}{2}k'^2\mu\beta\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)^3(C^2+t)}} \\ Z&=-\frac{3}{2}k'^2\mu\gamma\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)(C^2+t)^3}}, \end{aligned}$$

essendo $\mu=\frac{4}{3}ABC\rho\pi$. Queste formole si debbono a Jacobi.

14. Formole di Laplace. Supponiamo $A<B<C$, e poniamo

$$w=\frac{A}{\sqrt{A^2+t}}:$$

sarà evidentemente $w=0$ per $t=\infty$, e $w=1$ per $t=0$. Inoltre avremo

$$\frac{A^2}{w^2}=A^2+t\,;\quad B^2-A^2+\frac{A^2}{w^2}=B^2+t\,;\quad C^2-A^2+\frac{A^2}{w^2}=C^2+t\,,$$

ovveramente

$$\frac{A^2}{w^2}=A^2+t\,;\quad A^2\left(\lambda^2+\frac{1}{w^2}\right)=B^2+t;\quad A^2\left(\lambda'^2+\frac{1}{w^2}\right)=C^2+t\,,$$

ponendo per brevità

$$\lambda^2=\frac{B^2-A^2}{A^2}\,,\quad \lambda'^2=\frac{C^2-A^2}{A^2}.$$

Finalmente otterremo

$$dt=-\frac{2A^2dw}{w^3}\,.$$

Sostituendo questi valori nelle (10) risulterà :

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
X&=-\frac{3k'^2\alpha\mu}{A^3}\int_0^1\frac{w^2dw}{\sqrt{1+\lambda^2w^2}\sqrt{1+\lambda'^2w^2}}\\
Y&=-\frac{3k'^2\beta\mu}{A^3}\int_0^1\frac{w^2dw}{(1+\lambda^2w^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda'^2w^2}}\\
Z&=-\frac{3k'^2\gamma\mu}{A^3}\int_0^1\frac{w^2dw}{\sqrt{1+\lambda^2w^2}\,(1+\lambda'^2w^2)^{\frac{3}{2}}}\,.
\end{aligned}
$$

Se poi si pone

$$
F=\int_0^1\frac{w^2dw}{\sqrt{1+\lambda^2w^2}\sqrt{1+\lambda'^2w^2}}
$$

si ottiene con facili riduzioni

$$
\frac{d.\lambda F}{d\lambda}=\int_0^1\frac{w^2dw}{(1+\lambda^2w^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda'^2w^2}}
$$

$$
\frac{d.\lambda' F}{d\lambda'}=\int_0^1\frac{w^2dw}{\sqrt{1+\lambda^2w^2}(1+\lambda'^2w^2)^{\frac{3}{2}}}
$$

e le precedenti equazioni si trasformano in

$$
(12)\qquad X=-\frac{3k'^2\alpha\mu}{A^3}F\,;\quad Y=-\frac{3k'^2\beta\mu}{A^3}\frac{d.\lambda F}{d\lambda};\quad Z=-\frac{3k'^2\gamma\mu}{A^3}\frac{d.\lambda' F}{d\lambda'}\,.
$$

14. Proponiamoci ora di trovare il valore del potenziale di una massa di uniforme densità rinchiusa nella superficie (1) rispetto al punto esterno (α, β, γ). In questa ipotesi si ha

$$
\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{B^2}+\frac{\gamma^2}{C^2}>1\,,
$$

e quindi $T<0$ quando $t=0$. Crescendo t da questo limite sino ad ∞, T crescerà di valore, ma continuerà ad esser <0 sino a che t non verifica l'equazione

$$
(13)\qquad 0=\frac{\alpha^2}{A^2+t}+\frac{\beta^2}{B^2+t}+\frac{\gamma^2}{C^2+t}-1\,.
$$

Questa equazione ammette sempre una radice reale che rende >0 i trinomi A^2+t, B^2+t, C^2+t. Ed invero essendo $A<B<C$, se per brevità facciamo

$$A^2+t=A^2t_1$$

$$B^2+t=A^2(\lambda^2+t_1)\,;\quad C^2+t=A^2(\lambda'^2+t_1),$$

la (13) si cangia in

$$\Phi(t_1)=\frac{\alpha^2}{\lambda'^2+t_1}+\frac{\beta^2}{\lambda^2+t_1}+\frac{\gamma^2}{t_1}-A^2=0.$$

Quindi siccome per $t_1=0$, viene $\Phi(t_1)=+\infty$, e per $t_1=+\infty$ viene $\Phi(t_1)=-A^2$; così veramente la (13) ammette una radice reale, che rende >0 i trinomi A^2+t, B^2+t, C^2+t. Se dinotiamo con τ_1 questa radice, sarà $T<0$ da $t=0$ sino a $t=\tau$; e sarà $0<T<1$ da $t=\tau$ sino a $t=\infty$. In questa ipotesi avremo

$$V=2ABC\rho\int_0^\tau\frac{dt}{\sqrt{H}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}u\mathrm{T}}{u^2}du$$

$$+2ABC\rho\int_\tau^\infty\frac{dt}{\sqrt{H}}\int_0\frac{\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}u\mathrm{T}du}{u^2}du.$$

Ma per $T<0$ si ha

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{sen}u\cos u\mathrm{T}}{u}du=0\,,$$

e conseguentemente anche

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}u\mathrm{T}}{u^2}du=0.$$

Quindi nella supposizione che il punto (α, β, γ) resti fuori della massa μ, il potenziale è dato dalla equazione

$$V=2ABC\rho\int_\tau^\infty\frac{dt}{\sqrt{H}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}u\mathrm{T}}{u^2}du,$$

la quale si traduce in

$$V=\pi ABC\rho\int_\tau^\infty\frac{\left(1-\frac{\alpha^2}{A^2+t}-\frac{\beta^2}{B^2+t}-\frac{\gamma^2}{C^2+t}\right)dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)(C^2+t)}},$$

ragionando come si è fatto nel n° 13. Laonde se poniamo

$$W=\pi ABC\rho\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha^2}{A^2+t}-\frac{\beta^2}{B^2+t}-\frac{\gamma^2}{C^2+t}\right)dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)(C^2+t)}}, \tag{14}$$

e dinotiamo con V_i, V_e i valori del potenziale secondo che si riferisce ad un punto interno od esterno alla massa attraente, i valori di queste funzioni saranno ciò che diventa **W** quando nella (14) si pone $\sigma=0$, ovvero $\sigma=\tau$.

Dall'equazione (14) si deduce che le componenti dell'attrazione di μ parallele ai tre assi delle coordinate sul punto esterno (α, β, γ) sono date dall'equazioni (10) cangiando il solo limite inferiore zero in τ negl' integrali, che quest' equazioni contengono. Inoltre se si pone

$$w_1=\frac{A}{\sqrt{A^2+\tau}},$$

e quindi

$$F_1=\int_0^{w_1}\frac{w^2dw}{\sqrt{1+\lambda^2w^2}\sqrt{1+\lambda'^2w^2}}.$$

avremo nella stessa ipotesi

$$X_1=-\frac{3k'^2\mu\alpha}{A^3}F_1\,;\quad Y_1=-\frac{3k'^2\mu\beta}{A^3}\,\frac{d\lambda F_1}{d\lambda}\,;\quad Z=-\frac{3k'^2\mu\gamma}{A^3}\,\frac{d.\lambda' F_1}{d\lambda'}. \tag{15}$$

È degno di esser notato che w_1 è il rapporto del semiasse minimo dell' ellissoide che termina la massa μ al semiasse minimo dell' ellissoide confocale che passa pel punto (α, β, γ).

15.° Cerchiamo adesso il valore di **W** quando la massa μ è raccolta in un' ellissoide di rivoluzione; e supponiamola primieramente compressa. Essendo in generale $A<B<C$, faremo $B=C$; e ponendo per brevità

$$R=\int_{\sigma}^{\infty}\frac{dt}{(C^2+t)(A^2+t)^{\frac{3}{2}}}\;;\quad R'=\int_{\sigma}^{\infty}\frac{dt}{(C^2+t)^2\sqrt{A^2+t}} \tag{16}$$

troveremo che la (14) si trasforma in

$$W=\frac{3}{4}\mu\left[\int_{\sigma}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{H}}-\alpha^2R-(\beta^2+\gamma^2)R'\right]. \tag{17}$$

Quindi il problema è ridotto a trovare R ed R'. Dinotando con w una novella va-

riabile che verifica la condizione

$$w=\frac{A}{\sqrt{A^2+t}}$$

si ottiene manifestamente (v. il n° 14)

$$R=\frac{2}{A^3}\int_0^{w_1}\frac{w^2dw}{1+\lambda'^2w^2}\ ;\quad R'=\frac{2}{A^3}\int_0^{w_1}\frac{w^2dw}{(1+\lambda'^2w^2)^2}.$$

Quest'equazioni si trasformano in

$$R=\frac{2}{A^3\lambda'^2}\left[\int_0^{w_1}dw-\int_0^{w_1}\frac{dw}{1+\lambda'^2w}\right]=\frac{2}{A^3\lambda'^3}\left[\lambda'w_1-\text{arc}\,tg\lambda'w_1\right]$$

$$R'=-\frac{1}{A^3\lambda'^2}\cdot\frac{\lambda'w_1}{1+\lambda'^2w_1^2}+\frac{1}{A^3\lambda'^2}\int_0^{w_1}\frac{dw}{1+\lambda'^2w^2}=\frac{1}{A^3\lambda'^3}\left[\text{arc}tg\lambda'w_1-\frac{\lambda'w_1}{1+\lambda'^2w_1^2}\right].$$

Dunque quando la massa μ è raccolta in un'ellissoide di rivoluzione compressa si ha

$$(18)\qquad \begin{aligned}W=\frac{3}{4}\mu\Big[\int_\sigma^\infty\frac{dt}{\sqrt{H}}-\frac{2\alpha^2}{A^3\lambda'^3}(\lambda w_1-\text{arc}tg\lambda'w_1)\Big]\\ -\frac{3}{4}\mu\Big[\frac{\beta^2+\gamma^2}{A^3\lambda'^3}\Big(\text{arc}tg\lambda'w_1-\frac{\lambda'w_1}{1+\lambda'^2w_1^2}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Pel potenziale relativo al punto esterno faremo $\sigma=\tau$. Se poi il punto (α,β,γ) è interno alla massa μ, per avere il corrispondente potenziale basta porre $\tau=0$, $w_1=1$, in questa equazione.

Allorchè l' ellissoide di rivoluzione che termina la massa μ è allungata, il potenziale ad essa relativo può dedursi dalla (18) nel seguente modo. Se invece di supporre $A<B<C$ supponiamo essere $A>B>C$, l'equazione (14) non cessa di aver luogo; e per conseguenza è vera anche la (18) supponendo $B=C$. Però in questa ipotesi λ'^2 diventa quantità negativa, e nella (18) bisogna sostituire $i\lambda'$ alla quantità λ'. Così facendo troveremo

$$\begin{aligned}W=\frac{3}{4}\mu\Big[\int_\sigma^\infty\frac{dt}{\sqrt{H}}+\frac{2\alpha^2}{A^3\lambda'^3}\Big(\lambda'w_1-\frac{1}{i}\text{arc}tgi\lambda'w_1\Big)\Big]\\ +\frac{3}{4}\mu\frac{\beta^2+\gamma^2}{A^3\lambda'^3}\Big(\frac{1}{i}\text{arc}tgi\lambda'w_1-\frac{\lambda'w_1}{1-\lambda'^2w_1^2}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Ora dinoti p un arco qualunque, e sarà

$$e^{2ip}=\frac{1+itgp}{1-itgp}.$$

Da questa equazione si trae prendendo i logaritmi

$$ip=l\sqrt{\frac{1+itgp}{1-itgp}}\;;$$

onde ponendo $p=\mathrm{arc}tgi\lambda'w_1$, viene $tgp=i\lambda'w_1$, ed

$$\frac{1}{i}\,\mathrm{arc}tgi\lambda'w'=-ip=l\sqrt{\frac{1+\lambda'w_1}{1-\lambda'w_1}}.$$

Sostituendo nella precedente espressione di W avremo pel cercato potenziale

$$W=\frac{3}{4}\left[\int_\sigma^\infty\frac{dt}{\sqrt{H}}+\frac{2\alpha^2}{A^3\lambda'^3}\left(\lambda'w_1-l\sqrt{\frac{1+\lambda'w_1}{1-\lambda'w_1}}\right)\right]$$

$$(19)\qquad +\frac{3}{4}\mu\left[\frac{\beta^2+\gamma^2}{A^3\lambda'^3}\left(l\sqrt{\frac{1+\lambda'w_1}{1-\lambda'w_1}}-\frac{\lambda'w_1}{1-\lambda'^2w_1^2}\right)\right].$$

CAPITOLO IV.

Attrazione delle masse sferiche, e dei cilindri ad asse infinito di densità uniforme.

17.° Le formole che porgono i potenziali delle masse sferiche, e dei cilindri ad asse infinito, quando la loro densità è uniforme, possono agevolmente ricavarsi dall'equazione (14) del capitolo precedente. E per cominciare dalle masse sferiche supponendo che

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

sia l'equazione di una sfera, nella quale è racchiusa una massa di densità uniforme, la funzione W relativa a questa massa si otterrà dalla (14) ponendovi $A=B=C=R$, cioè si otterrà dall'equazione

$$(1)\qquad W=\pi R^3\rho\int_\sigma^\infty\left(\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}-\frac{l^2}{\Delta^2\sqrt{\Delta}}\right)d\Delta,$$

dove per brevità si è posto

$$R^2+t=\Delta\;,\quad l^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Ora si ha in generale

$$\int\left(\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}-\frac{l^2}{\Delta^2\sqrt{\Delta}}\right)d\Delta=-\frac{2}{\sqrt{\Delta}}+\frac{2l^2}{3\Delta\sqrt{\Delta}};$$

onde avvertendo che per $t=0$, τ, ∞ si ha rispettivamente $\Delta=R^2$, l^2, ∞, risulta

$$(2)\qquad V_i=2\pi R^2\rho-\frac{2\pi l^2}{3}\rho\ ;\quad V_e=\frac{4\pi R^3\rho}{3l}.$$

Se con R_0 si dinota il raggio di una sfera concentrica alla precedente, e con $V_i^{(0)}$, $V_e^{(0)}$ i potenziali della massa che in essa è racchiusa, si ha

$$V_i^{(0)}=2\pi R_0^2\rho-\frac{2\pi l^2}{3}\rho\ ,\quad V_e^{(0)}=\frac{4\pi R_0^3}{3l}\rho,$$

supponendo che la densità ed il punto (α, β, γ) rimangano invariati. Quindi se $R_0<R$ risulta

$$(3)\qquad V'_i=2\pi\rho(R^2-R_0^2)\ ;\quad V'_e=\frac{4\pi\rho(R^3-R_0^3)}{3l}.$$

I primi membri di quest' equazione sono i potenziali dello strato sferico di spessezza $R-R_0$. Inoltre dinotando con μ la massa di questo strato si ha

$$\mu=\frac{4\pi\rho}{3}(R^3-R_0^3).$$

Laonde V'_i è indipendente dalle coordinate del punto attirato, e $V'_e=\frac{\mu}{l}$: cioè *un punto collocato nel vano di uno strato sferico di densità uniforme non patisce alcuna attrazione, ed un punto fuori lo strato è attirato come se la sua massa fosse raccolta nel centro.* Questa legge non è punto derogata se la massa proposta si compone di strati concentrici di densità uniforme, la quale per altro varii secondo qualunque legge da strato a strato.

Per determinare il potenziale del punto (α, β, γ) quando fa parte dello strato sferico, dinotando con U questo potenziale avremo evidentemente

$$U=\frac{4\pi\rho}{3l}R^3+\frac{2\pi\rho}{3}l^2-2\pi\rho R_0^2.$$

Imperocchè il punto predetto può supporsi collocato sulla superficie di una sfera concentrica alle precedenti e di raggio $=l$; e quindi come interno rispetto allo strato di spessezza $R-l$, ed esterno rispetto allo strato di spessezza $l-R_0$.

18.° Dall'equazioni (2) ricavasi

$$(4)\qquad \begin{aligned}\frac{dV_i}{d\alpha}&=-\frac{4\pi\rho}{3}\alpha\ ;\quad \frac{dV_e}{d\alpha}=-\frac{4\pi\rho}{3l^3}R^3\alpha\\ \frac{dV_i}{d\beta}&=-\frac{4\pi\rho}{3}\beta\ ;\quad \frac{dV_e}{d\beta}=-\frac{4\pi\rho}{3l^3}R^3\beta\\ \frac{dV_i}{d\gamma}&=-\frac{4\pi\rho}{3}\gamma\ ;\quad \frac{dV_e}{d\gamma}=-\frac{4\pi\rho}{3l^3}R^3\gamma;\end{aligned}$$

e derivando ancora una seconda volta

$$\frac{d^2V_i}{d\alpha^2}=-\frac{4\pi\rho}{3}\ ;\ \frac{d^2V_e}{d\alpha^2}=\frac{4\pi\rho}{3l^5}(3\alpha^2-l^2)R^3$$

(5) $$\frac{d^2V_i}{d\beta^2}=-\frac{4\pi\rho}{3}\ ;\ \frac{d^2V_e}{d\beta^2}=\frac{4\pi\rho}{3l^5}(3\beta^2-l^2)R^3$$

$$\frac{d^2V_i}{d\gamma^2}=-\frac{4\pi\rho}{3}\ ;\ \frac{d^2V_e}{d\gamma^2}=\frac{4\pi\rho}{3l^5}(3\gamma^2-l^2)R^3.$$

Supponendo il punto attirato sulla superficie della sfera, s' identificano tanto i secondi membri dell'equazioni (2) quanto i secondi membri delle (4). Non accade lo stesso dei secondi membri delle (5) poichè in tale ipotesi risulta

$$\frac{d^2V_e}{d\alpha^2}-\frac{d^2V_i}{d\alpha^2}=\frac{4\pi\rho\alpha^2}{R^2}\ ,\qquad \frac{d^2V_e}{d\beta^2}-\frac{d^2V_i}{d\beta^2}=\frac{4\pi\rho\beta^2}{R}\ ,\qquad \frac{d^2V_e}{d\gamma^2}-\frac{d^2V_i}{d\gamma^2}=\frac{4\pi\rho\gamma^2}{R^2}.$$

Le derivate del second' ordine del potenziale della sfera non variano per conseguenza con legge di continuità, allorchè il punto attirato passa dallo spazio interno della sfera nello spazio esterno. Vale lo stesso della funzione Δ^2V.

19.° La proprietà, che abbiamo ravvisata nelle masse composte di strati sferici concentrici di uniforme densità, cioè di attirare come se fossero tutte raccolte nel loro centro comune, è senza dubbio rimarchevolissima. È pregio dell'opera investigare se questa proprietà ha luogo soltanto nell'attrazione secondo la legge Newtoniana, o se si verifica nell' attrazione secondo qualche altra legge dipendente però dalla sola distanza dal punto attirato.

Se dinotiamo con r il raggio di una sfera che ha il suo centro nell'origine delle coordinate, con θ l'angolo che questo raggio fa con la retta l, e con ω l'angolo che il piano (lr) fa con un altro piano fisso condotto per la retta l, l'elemento differenziale ds di questa superficie si ha dall'equazione $ds=r^2\operatorname{sen}\theta d\theta d\omega$; ed il potenziale di uno strato infinitamente sottile costruito su questa sfera è

$$V=\rho r^2 dr\int\int F(D)\operatorname{sen}\theta d\theta d\omega\ ,$$

dinotando D la distanza del punto attirato dall'elemento $d\mu$ dello strato medesimo, ed F(D) una funzione ignota della sola variabile D. Siccome le integrazioni indicate nell' espressione di V si debbono estendere ai limiti $\omega=0$, $\omega=2\pi$; $\theta=0$, $\theta=\pi$, e D non contiene ω, così potremo anche tradurla in

$$V=2\pi\rho r^2 dr\int F(D)\operatorname{sen}\theta d\theta.$$

Ora supponiamo che la massa dello strato fosse tutta raccolta nel suo centro: se il punto attirato si trova nello spazio esterno, il valore di V debb'essere ancora

$$V=4\pi\rho F(l)r^2dr$$

Laonde per determinare la funzione F si ha l'equazione

$$2F(l)=\int F(D)\,\text{sen}\theta d\theta\,,$$

la quale si traduce in

(6) $$2lrF(l)=\int F(D)DdD$$

se si osserva che

$$D^2=l^2-2rl\cos\theta+r^2.$$

Se per compendio di algoritmo si pone

(7) $$\int F(D)DdD=\psi(D)$$

essendo $l>r$ ed estendendo l'integrazione ai predetti limiti viene per $\theta=0$, $D=l-r$, e per $\theta=\pi$ viene $D=l+r$. Quindi la (6) diventa

$$2lrF(l)=\psi(l+r)-\psi(l-r).$$

Ma si ha evidentemente

$$\frac{d^2}{dl^2}\Big[\psi(l+r)-\psi(l-r)\Big]=\frac{d^2}{dr^2}\Big[\psi(l+r)-\psi(l-r)\Big]$$

$$\frac{d^2}{dl^2}\Big[lrF(l)\Big]=2rF'(l)+rlF''(l)\ ;\quad \frac{d^2}{dr^2}\Big[lrF(l)\Big]=0.$$

Laonde per ottenere la funzione F si ha l'equazione semplicissima

$$\frac{d^2}{d^2l}\Big[lF(l)\Big]=0\,,$$

dalla quale ricavasi

(8) $$F(l)=\frac{P}{l}+Q\,,$$

dinotando P, Q due costanti arbitrarie. Quando poi il punto attirato è nel vano dello strato, il potenziale V deve essere indipendente da l; onde ponendo che G sia una costante sarà

$$2Glr=\int F(D)DdD$$

l'equazione dalla quale deve ricavarsi F. Or siccome nella presente ipotesi $l<r$, così viene

$$2Glr=\psi(r+l)-\psi(r-l).$$

Derivando questa equazione rispetto ad r si ha

$$2G=\frac{\psi'(r+l)-\psi'(r-l)}{l}.$$

Or questa equazione deve esser vera qualunque sia l, purchè abbiasi $l<r$; onde sarà vera anche per $l=0$. Essendo dunque

$$\lim:\frac{\psi'(r+l)-\psi'(r-l)}{l}=2\psi''(r),$$

risulta manifestamente $\psi''(r)=G$; $\psi'(r)=Gr+G_1$. Ma dalla (7) ricavasi $\psi'(r)=rF(r)$. Dunque

$$rF(r)=Gr+G_1,$$

e conseguentemente

$$F(r)=\frac{G_1}{r}+G.$$

Questa equazione s'identifica con la (8), se ad r si sostituisce l, e si pone $G_1=P$, $G=Q$; onde tanto se il punto attirato è fuori dello strato, quanto se è nel vano dello strato, il richiesto valore di F(D) è dato dall'equazione

$$F(D)=\frac{P}{D}+Q.$$

Siccome per $D=\infty$ deve svanire il potenziale, così per questo valore di D deve svanire anche F(D). Quindi $Q=0$, ed F(D) è inversamente proporzionale a P come nell'attrazione Newtoniana. Dunque nella sola attrazione Newtoniana si verifica che gli strati sferici di omogenea densità attirano come se le loro masse fossero raccolte nel centro.

20.° Occupiamoci adesso delle masse cilindriche ad asse infinito di densità uniforme. Siccome l'equazione dell'ellissoide si trasforma in quella del cilindro quando uno dei semiassi si suppone infinito, così il valore di W che risolve il presente problema si ottiene supponendo nella (14) del capitolo precedente una delle tre quantità A, B, C. infinita. Quindi ponendo p. es. $C=\infty$ nella predetta equazione viene

$$W=\pi AB\rho\int_0^\infty\frac{\left(1-\frac{\alpha^2}{A^2+t}-\frac{\beta^2}{\beta^2+t}\right)dt.}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)}}; \tag{9}$$

e l'equazione della superficie che limita questa massa diventa

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1.$$

Pongasi adesso

$$(10)\qquad Q=\int_\sigma^\infty \frac{dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)}},$$

e si avrà evidentemente

$$\frac{1}{A}\frac{dQ}{dA}=-\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(A^2+t)\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)}}$$

$$\frac{1}{B}=\frac{dQ}{dB}=-\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(B^2+t)\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)}};$$

Sostituendo questi valori nella (9) risulta

$$(11)\qquad W=\pi AB\rho\left(Q+\frac{\alpha^2}{A}\frac{dQ}{dA}+\frac{\beta^2}{B}\frac{dQ}{dB}\right).$$

Quindi il problema si riduce a trovare la funzione Q e le sue derivate rispetto ad A e B. Sia

$$B>A\,,\quad B^2-A^2=A^2h^2\,;\quad A^2+t=A^2w^2\,,$$

ed avremo evidentemente

$$B^2+t=A^2(h^2+w^2)\,;\qquad \frac{dt}{\sqrt{A^2+t}}=2A\,dw.$$

Laonde con facili riduzioni verrà

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)}}=2\int\frac{dw}{\sqrt{h^2+w^2}}=2\,l\left(\frac{w+\sqrt{h^2+w^2}}{h}\right);$$

e sostituendo per w il suo valore

$$(12)\qquad \int\frac{dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)}}=2l\left(\frac{\sqrt{B^2+t}+\sqrt{A^2+t}}{\sqrt{B^2-A^2}}\right).$$

Se dinotiamo con Q_1 il primo membro di questa equazione troveremo dopo alcune riduzioni

$$\frac{dQ_1}{dA}=\frac{2A}{B^2-A^2}\sqrt{\frac{B^2+t}{A^2+t}}\,;\quad \frac{dQ_1}{dB}=-\frac{2B}{B^2-A^2}\sqrt{\frac{A^2+t}{B^2+t}}.$$

I valori di $\frac{dQ}{dA}$, $\frac{dQ}{dB}$ si ottengono ponendo $t=\infty$ in quest' equazioni, e sottraendone i risultati che vengono ponendovi $t=\sigma$. Quindi avremo

$$\frac{dQ}{dA}=\frac{2A}{B^2-A^2}\left(1-\sqrt{\frac{B^2+\sigma}{A^2+\sigma}}\right);\quad \frac{dQ}{dB}=-\frac{2B}{B^2-A^2}\left(1-\sqrt{\frac{A^2+\sigma}{B^2+\sigma}}\right).$$

Il valore di Q però $=\infty$, come risulta dalla (12) ponendovi $t=\infty$. Questo risultato dimostra che W è infinito, il che si oppone a quanto si è dimostrato nel num. 4. Nella stessa difficoltà si è imbattuto il Delauncy cercando di risolvere con altro metodo questo problema (*)

Per togliere questa difficoltà l'illustre Matematico osserva che le proprietà caratteristica del potenziale si è di verificare l'equazione

$$\frac{d^2W}{d\alpha^2}+\frac{d^2W}{d\beta^2}+\frac{d^2W}{d\gamma^2}=0\,, \quad -4\pi\rho$$

secondo che il punto attirato è esterno ed interno alla massa attraente. Questa equazione nel caso nostro si riduce a

$$\frac{d^2W}{d\alpha^2}+\frac{d^2W}{d\beta^2}=0, \quad -4\pi\rho.$$

Ora è evidente che se questa equazione è verificata dalla funzione W quando ad essa si attribuisce il valore (9), lo sarà anche se W è data dalla equazione seguente

$$W=\pi AB\rho\int_0^\infty\left[-\frac{dt}{t+K}+\frac{\left(1-\frac{\alpha^2}{A^2+t}-\frac{\beta^2}{B^2+t}\right)dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)}}\right]$$

dinotando K una costante indipendente da α e β. Laonde se si pone

$$Q_1=\int\left(\frac{dt}{\sqrt{(A^2+t)(B^2+t)}}-\frac{dt}{t+K}\right),$$

eseguendo l'integrazione risulta

$$Q_1=2l\left[\frac{\sqrt{B^2+t}+\sqrt{A^2+t}}{\sqrt{t+K}\sqrt{B^2-A^2}}\right].$$

I valori di Q corrispondenti a $t=\sigma$, $t=\infty$ sono in questo caso

$$2l\left[\frac{\sqrt{B^2+\sigma}+\sqrt{A^2+\sigma}}{\sqrt{\sigma+K}\sqrt{B^2-A^2}}\right], \quad 2l\left[\frac{2}{\sqrt{B^2-A^2}}\right],$$

onde risulta

$$Q=2l\left[2-\frac{\sqrt{B^2+\sigma}+\sqrt{A_2+\sigma}}{\sqrt{\sigma+K}}\right]-l(B^2-A^2). \tag{13}$$

Inoltre essendo nella stessa ipotesi i valori di $\frac{dQ_1}{dA}$, $\frac{dQ_1}{dB}$ quelli stessi che prece-

(*) V. il Giornale di Liouville tomo IX. anno 1841.

dentemente si sono ottenuti, rimangono invariati anche i valori di $\frac{dQ}{dA}, \frac{dQ}{dB}$. Quindi il potenziale W continuerà ad essere rappresentato dall'equazione (11), purchè però il valore di Q si supponga dato dalla equazione (13). La presenza della costante arbitraria K nella espressione di W fa vedere che questa funzione non è *monodroma*.

21.° Dall'equazione (11) si deduce

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dW}{d\alpha} &= \frac{4\pi AB\rho\alpha}{B^2-A^2}\left(1-\sqrt{\frac{B^2+\sigma}{A^2+\sigma}}\right) \\
\frac{Wd}{d\beta} &= -\frac{4\pi AB\rho\beta}{B^2-A^2}\left(1-\sqrt{\frac{A^2+\sigma}{B^2+\sigma}}\right) \\
\frac{dW}{d\gamma} &= 0.
\end{aligned}
$$

Dunque qualunque sia la posizione del punto attirato rispetto al cilindro ad asse infinito, la componente dell' attrazione parallela a questo asse è nulla. Or se il punto attirato si suppone esterno al cilindro si ha $\sigma=0$, e le (14) diventano

$$
\frac{dW}{d\alpha} = -\frac{4\pi B\rho\alpha}{A+B} \quad ; \quad \frac{dW}{d\beta} = \frac{4\pi A\rho\beta}{A+B}.
$$

Quest'equazioni hanno luogo anche quando il punto attirato si suppone sulla superficie del cilindro. Ed in tal caso ponendovi $A=\lambda B$ s'identificano con quelle trovate da Laplace trattando della figura dell' anello di Saturno.

Allorchè il punto attirato si suppone esterno al cilindro bisogna supporre $\sigma=\tau$ nelle (14) dinotando τ la radice dell'equazione

$$
(15) \qquad \frac{\alpha^2}{A^2+\sigma} + \frac{\beta^2}{B^2+\sigma} = 1
$$

che rende positive entrambe le quantità $A^2+\sigma$, $B^2+\sigma$. Da questa equazione ricavasi primieramente

$$
\frac{B^2+\sigma}{A^2+\sigma}\alpha^2 = B^2+\sigma-\beta^2 \ ; \quad \frac{A^2+\sigma}{B^2+\sigma}\beta^2 = A^2+\sigma-\alpha^2 \ ;
$$

onde sostituendo nelle (14) risulta

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dW}{d\alpha} &= -\frac{4\pi\lambda\rho}{\lambda^2-1}\left[\alpha-\sqrt{B^2+\sigma-\beta^2}\right] \\
\frac{dW}{d\beta} &= \frac{4\pi\lambda\rho}{\lambda^2-1}\left[\beta-\sqrt{A^2+\sigma-\alpha^2}\right].
\end{aligned}
$$

Inoltre ponendo $w=A^2+\sigma$, $w'=B^2+\sigma$, $l^2=\alpha^2+\beta^2$, $k^2=B^2-A^2$, la (15) si tra-

duce successivamente nelle due seguenti equazioni

$$w^2+(k^2-l^2)w-\alpha^2k^2=0$$

$$w'^2-(k^2+l^2)w'+\beta^2k^2=0$$

dalle quali si deduce

$$w=-\frac{1}{2}(k^2-l^2)\pm\frac{1}{2}\sqrt{S}\;;\qquad w'=\frac{1}{2}(k^2+l^2)\pm\frac{1}{2}\sqrt{S}$$

avvertendo che

$$S=(k^2-l^2)^2+4\alpha^2k^2=(k^2+l^2)^2-4\beta^2k^2.$$

Quindi avremo

$$B^2+\sigma-\beta^2=\frac{1}{2}(k^2+\alpha^2-\beta^2)+\frac{1}{2}\sqrt{(k^2-l^2)^2+4\alpha^2k^2}$$

$$=\frac{1}{2}(k^2+\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{2}\sqrt{(k^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}.$$

Se si pone

$$v+v'=k^2+\alpha^2-\beta^2\;;\quad 2\sqrt{vv'}=\sqrt{(k^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2},$$

si ottiene con facili riduzioni $v-v'=2\alpha\beta i$; e per conseguenza

$$v=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta i)^2+k^2\}$$

$$v'=\frac{1}{2}\{(\alpha-\beta i)^2+k^2\}.$$

Dunque avvertendo che $k^2=-A^2\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)$, risulta

$$\sqrt{B^2+\sigma-\beta^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+\beta i)^2-A^2\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\beta i)^2-A^2\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}.$$

Così pure troveremo

$$A^2+\sigma-\alpha^2=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2-k^2)-\frac{1}{2}\sqrt{(k^2+l^2)^2-4k^2\beta^2},$$

la quale equazione mediante la trasformazione precedente porge

$$\sqrt{A^2+\sigma^2-\alpha^2}=\frac{i}{2}\sqrt{(\alpha+\beta i)^2-A^2\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}$$

$$-\frac{i}{2}\sqrt{(\alpha-\beta i)^2-A^2\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}.$$

Sostituendo questi valori nelle (16) otterremo le stesse formole trovate da Laplace con altro metodo nel capitolo VI del secondo tomo della Meccanica Celeste.

CAPITOLO V.

Attrazione di una massa omogenea terminata da una qualunque superficie di 2.° grado.

22.° L'equazione di una superficie di secondo grado riferita a tre assi rettangolari paralleli agli assi di figura può sempre tradursi nella seguente forma

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z - 1 = 0.$$

Se i simboli x, y, z dinotano non solo le coordinate dei punti della superficie, ma anche le coordinate di un punto qualunque della massa contenuta dentro di essa, posto

$$-\omega = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z - 1,$$

la funzione ω svanirà quando si riferisce a' soli punti della superficie stessa, ma sarà diversa da zero per gli altri punti. Avremo dunque per un punto qualunque della massa attraente

$$\begin{aligned} \omega u + r^2\psi = u + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,\psi - 2\,(\alpha\psi + b_1 u)\,x + (\psi - a_1 u)\,x^2 \\ - 2\,(\beta\psi + b_2 u)\,y + (\psi - a_2 u)\,y^2 \\ - 2\,(\gamma\psi + b_3 u)\,z + (\psi - a_3 u)\,z^2\,. \end{aligned}$$

Ora sia per brevità di algoritmo

$$\begin{aligned} p &= u + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,\psi \\ q &= (\psi - a_1 u)\,x^2 - 2\,(\alpha\psi + b_1 u)\,x \\ q_1 &= (\psi - a_2 u)\,y^2 - 2\,(\beta\psi + b_2 u)\,y \\ q_2 &= (\psi - a_3 u)\,z^2 - 2\,(\gamma\psi + b_3 u)\,z\,: \end{aligned}$$

identificando q con $bw^2 + 2cw$, bisogna supporre

$$w = x, \quad b = \psi - a_1 u, \quad c = -(\alpha\psi + b_1 u)\,;$$

e quindi si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^q\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\psi - a_1 u}}\; e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(\alpha\psi + b_1 u)^2}{\psi - a_1 u}\right)}.$$

Lo scambio di a_1, α, b_1 rispettivamente con a_2, β, b_2; e poscia con a_3, γ, b_3 ci fa trarre da questa equazione i valori di $\int_{-\infty}^{\infty} e^{q_1} dy, \int_{-\infty}^{\infty} e^{q_2} dz$. Se dunque si pone

$$R + \frac{(\alpha\psi + b_1 u)^2}{\psi - a_1 u} + \frac{(\beta\psi + b_2 u)^2}{\psi - a_2 u} + \frac{(\gamma\psi + b_3 u)^2}{\psi - a_3 u} = 0 ,$$

avremo

$$p + R = u - u\psi \frac{\left(\alpha^2 a_1 + 2\alpha b_1 + \frac{b_1^2 u}{\psi}\right)}{\psi - a_1 u}$$

$$- u\psi \frac{\left(\beta^2 a_2 + 2\beta b_2 + \frac{b_2^2 u}{\psi}\right)}{\psi - a_2 u}$$

$$- u\psi \frac{\left(\gamma^2 a_3 + 2\gamma b_3 + \frac{b_3^2 u}{\psi}\right)}{\psi - a_3 u}$$

e conseguentemente

$$V = 2i\rho \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u \, du}{u} \int_0^{\infty} \frac{e^{i(p+R)} d\psi}{\sqrt{\psi (\psi - a_1 u)(\psi - a_2 u)(\psi - a_3 u)}} .$$

Ora in questa equaziono si muti u in $-u$, e si ponga $\psi t = u$,

$$\left.\begin{aligned} T = 1 &- \frac{\alpha^2 a_1 + 2\alpha b_1 - b_1^2 t}{1 + a_1 t} \\ &- \frac{\beta^2 a_2 + 2\beta b_2 - b_2^2 t}{1 + a_2 t} \\ &- \frac{\gamma^2 a_3 + 2\gamma b_3 - b_3^2 t}{1 + a_3 t} \end{aligned}\right\} \quad (1) ,$$

nella supposizione di $0 < T < 1$ troveremo

$$V = \pi\rho \int_0^{\infty} \frac{T dt}{\sqrt{(1 + a_1 t)(1 + a_2 t)(1 + a_3 t)}} \qquad (2)$$

come risulta dal § 12.

23. Da questa equazione possiamo agevolmente ricavare l'espressione del potenziale del paraboloide ellittico. Se si pone $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ si ottiene dalla (1)

$$T = 1 - b_1 (2\alpha - b_1 t) - \frac{\beta^2 a_2}{1 + a_2 t} - \frac{\gamma^2 a_3}{1 + a_3 t} \qquad (3) ;$$

onde ponendo per brevità

$$H = (1 + a_2 t)(1 + a_3 t) ,$$

la (2) si trasforma in

$$V = \pi\rho \int_0^{\infty} \left[1 - 2\alpha b_1 + b_1^2 t - \frac{\beta^2 a_2}{1 + a_2 t} - \frac{\gamma^2 a_3}{1 + a_3 t}\right] \frac{dt}{\sqrt{H}} . \qquad (4)$$

Allorchè si suppone $T = 0$ si ha

$$0 = 1 - 2\alpha b_1 + b_1{}^2 t - \frac{\beta^2 a_2}{1 + a_2 t} - \frac{\gamma^2 a_3}{1 + a_3 t}\,; \tag{5}$$

e nella supposizione di $T = 1$ si ottiene

$$0 = 2\alpha b_1 - b_1{}^2 t + \frac{\beta^2 a_2}{1 + a_2 t} + \frac{\gamma^2 a_3}{1 + a_3 t} \tag{6}$$

Quest' equazioni porgono i limiti, che debbono rimpiazzare 0 ed ∞ nella espressione di V, Ma vuolsi osservare che la (6) ammette sempre una radice reale > 0, poichè nella equazione del paraboloide ellittico può sempre supporsi $b_1 > 0$, e necessariamente debbono essere positivi a_2 ed a_3. L' equazione (5) però non sempre può ammettere una radice reale > 0; ma l'ammette necessariamente quando ha luogo la condizione

$$2\alpha b_1 + \beta^2 a_2 + \gamma^2 a_3 - 1 > 0\,,$$

il che accade soltanto allorchè il punto attirato è posto fuori della massa attraente. Quando poi il punto attirato fa parte di questa massa si ha

$$2\alpha b_1 + \beta^2 a_2 + \gamma^2 a_3 - 1 < 0.$$

Siccome però il primo membro di questa inequazione è il valore di T col segno mutato, che corrisponde a $t = 0$; ne conseguita che lo zero può rimanere uno dei limiti dell' integrale (4), allorchè si cerca il potenziale rispetto ad un punto interno. Adunque nel caso del paraboloide ellittico il valore di V si può tradurre in

$$V = \pi\rho \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[1 - 2\alpha b_1 + b_1{}^2 t - \frac{\beta^2 a_2}{1 + a_2 t} - \frac{\gamma^2 a_3}{1 + a_3 t}\right] \frac{dt}{\sqrt{H}}\,, \tag{7}$$

dinotando τ_2 la radice reale e positiva dell' equazione (5), e τ_1 lo zero ovvero la radice reale e positiva della (5), secondo che il punto attirato fa parte della massa attraente, ovvero è posto fuori di essa.

Se nella presente ipotesi poniamo

$$a_2 B^2 = 1\,, \qquad a_3 C^2 = 1\,,$$

l' equazione (7) diventa

$$V = \pi\rho\, BC \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[1 - 2\alpha b_1 + b_1{}^2 t - \frac{\beta^2}{B^2 + t} - \frac{\gamma^2}{C^2 + t}\right] \frac{dt}{\sqrt{H_1}}\,, \tag{8}$$

dove $H_1 = (B^2 + t)(C^2 + t)$. Quindi supposto

$$P = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dt}{\sqrt{H_1}}\,,$$

le componenti dell' attrazione del paraboloide ellittico secondo i tre assi delle coor-

dinate si hanno dall' equazioni

$$X = -2\pi b_1 \rho BCP ; \quad Y = 2\pi\rho\beta C \frac{dP}{dB} ; \quad Z = 2\pi\rho\gamma B \frac{dP}{dC} .$$

Il valore di P è stato trovato nel §. 20.°

21.° Ritorniamo al caso generale, e cerchiamo quale debba essere il valore di V nella ipotesi che gli assi delle coordinate non siano paralleli agli assi di figura dello sferoide. Se la massa attraente è terminata da una superficie di 2.° grado fornita di centro, collocando in questo punto l' origine delle coordinate, l'equazione della predetta superficie può tradursi nella forma

$$Fx'^2 + F'y'^2 + F''z'^2 + 2Gy'z' + 2G'x'z' + 2G''x'y' = 1 , \qquad (9)$$

dinotando con x', y', z' le coordinate parallele ai nuovi assi. Ora si sa che le tre radici dell' equazione

$$\begin{vmatrix} F-h , G'' , G' \\ G'' , F'-h , G \\ G' , G , F''-h \end{vmatrix} = 0$$

sono le inverse dei quadrati dei semi-assi della superficie stessa, per guisa che avremo l' identità

$$\begin{vmatrix} F-h , G'' , G' \\ G'' , F'-h , G \\ G' , G , F''-h \end{vmatrix} = -(h-a_1)(h-a_2)(h-a_3)$$

Ponendo per brevità

$$A_1 = F + F' + F''$$

$$A_2 = FF' + FF'' + F'F'' - G^2 - G'^2 - G''^2$$

$$A_3 = FF'F'' - FG^2 - F'G'^2 - F''G''^2 + 2GG'G'' ,$$

e sviluppando i due membri della precedente identità troveremo

$$a_1 + a_2 + a_3 = A_1 ; \quad a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = A_2 ; \quad a_1a_2a_3 = A_3 . \qquad (10)$$

Inoltre siano l, m, n; l', m', n'; l'', m'', n'' i coseni degli angoli che gli assi di figura della superficie formano coi tre assi delle coordinate x', y', z', e sarà

$$\left.\begin{aligned} x &= lx' + my' + nz' \\ y &= l'x' + m'y' + n'z' \\ z &= l''x' + m''y' + n''z' \end{aligned}\right\} \qquad (11).$$

Se questi valori si sostituiscono in

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1 ,$$

che è l'equazione della superficie riferita a' tre assi di figura, avremo dal paragone dello sviluppo del primo membro di questa equazione col primo membro della (9) le relazioni qui appresso notate

$$F = a_1 l^2 + a_2 l'^2 + a_3 l''^2 \;; \quad G = a_1 mn + a_2 m'n' + a_3 m''n''$$

$$F' = a_1 m^2 + a_2 m'^2 + a_3 m''^2 ; \quad G' = a_1 ln + a_2 l'n' + a_3 l''n''$$

$$F'' = a_1 n^2 + a_2 n'^2 + a_3 n''^2 \;; \quad G'' = a_1 lm + a_2 l'm' + a_3 l''m''.$$

Ora se si avverte che

$$l'' = mn' - m'n \;; \quad m'' = nl' - n'l \;; \quad n'' = lm' - l'm$$

$$l' = m''n - mn'' \;; \quad m' = n''l - nl'' \;; \quad n' = l''m - lm''$$

$$l = m'n'' - m''n' ; \quad m = n'l'' - n''l' ; \quad n = l'm'' - l''m',$$

dalle (12) si trae agevolmente

$$\left.\begin{aligned} P &= F'F'' - G^2 = a_1 a_2 l''^2 + a_3 a_1 l'^2 + a_2 a_3 l^2 \\ P' &= FF'' - G'^2 = a_1 a_2 m''^2 + a_3 a_1 m'^2 + a_2 a_3 m^2 \\ P'' &= FF' - G''^2 = a_1 a_2 n''^2 + a_3 a_1 n'^2 + a_2 a_3 n^2 \\ Q &= G'G'' - GF = a_1 a_2 m''n'' + a_3 a_1 m'n' + a_2 a_3 mn \\ Q' &= GG'' - G'F' = a_1 a_2 l''n'' + a_3 a_1 l'n' + a_2 a_3 ln \\ Q'' &= GG' - G''F'' = a_1 a_2 l''m'' + a_3 a_1 l'm' + a_2 a_3 lm \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Premesse queste cose sia

$$S = \frac{\alpha^2 a_1}{1 + a_1 t} + \frac{\beta^2 a_2}{1 + a_2 t} + \frac{\gamma^2 a_3}{1 + a_3 t} : \qquad (14)$$

se per α, β, γ si pongono quelli valori che porgono le (11) quando questi tre simboli si sostituiscono ad x, y, z, e nello stesso tempo ad x', y', z' si sostituiscono i simboli α', β', γ', troveremo

$$S = \frac{\psi + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(A_3 t^2 + A_2 t) - X t}{H},$$

dove per brevità si è posto

$$\psi = F\alpha'^2 + F'\beta'^2 + F''\gamma'^2 + 2G\beta'\gamma' + 2G'\alpha'\gamma' + 2G''\alpha'\beta',$$

$$X = a_1 a_2 (\alpha' l'' + \beta' m'' + \gamma' n'')^2 + a_3 a_1 (\alpha' l' + \beta' m' + \gamma' n')^2 + a_2 a_3 (\alpha' l + \beta' m + \gamma' n)^2.$$

In seguito delle (13) quest' ultima funzione si traduce in

$$X = P\alpha'^2 + P'\beta'^2 + P''\gamma'^2 + 2Q\beta'\gamma' + 2Q'\alpha'\gamma' + 2Q''\alpha'\beta',$$

e dalle (10) si trae

$$H = 1 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3.$$

Quindi la funzione S risulta espressa per i coefficienti della (8) e per le coordinate α', β', γ'. Sostituendo nella espressione di V, ed avvertendo che $T = 1 - S$ si ottiene

$$V = \pi\rho\int_0^\infty \left[1 - \frac{\psi + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\Lambda_2 t^2 + \Lambda_1 t) - Xt}{H}\right]\frac{dt}{\sqrt{H}},$$

che è il potenziale richiesto. Questa espressione di V è dovuta a Dirichlet.

25.° È pregio dell'opera generalizzare questo risultato, ed estenderlo al potenziale di una massa terminata da una qualunque superficie di 2.° grado. Se nella equazione

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2\,b_1x + 2\,b_2y + 2\,b_3z = 1$$

si sostituiscono i valori di x, y, z tolti dalle (11), e si paragona il risultato di questa sostituzione con l'equazione

$$Fx'^2 + F'y'^2 + F''z'^2 + 2\,Gy'z' + 2\,G'x'z' + 2\,G''x'y' + 2\,Lx' + 2\,L'y' + 2\,L''z' = 1$$

che è l'equazione della superficie riferita ai nuovi assi, troveremo a_1, a_2, a_3 espressi in funzione di F, F', F'', G, G', G'' come precedentemente abbiamo trovato, ed inoltre

$$b_1 = Ll + L'm + L''n$$
$$b_2 = Ll' + L'm' + L''n'$$
$$b_3 = Ll'' + L'm'' + L''n''.$$

Quindi risulta

$$2\alpha b_1 - b_1^2t = 2\,(l\alpha' + m\beta' + n\gamma')(Ll + L'm + L''n) - (Ll + L'm + L''n)^2t$$

$$2\beta b_2 - b_2^2t = 2\,(l'\alpha' + m'\beta' + n'\gamma')(Ll' + L'm' + L''n') - (Ll' + L'm' + L''n')^2t$$

$$2\gamma b_3 - b_3^2t = 2\,(l''\alpha' + m''\beta' + n''\gamma')(Ll'' + L'm'' + L''n'') - (Ll'' + L'm'' + L''n'')^2t.$$

Ora la (1) può tradursi in

$$T = 1 - S - \left\{\frac{2\alpha b_1 - b_1^2t}{1 + a_1t} + \frac{2\beta b_2 - b_2^2t}{1 + a_2t} + \frac{2\gamma b_3 - b_3^2t}{1 + a_3t}\right\}.$$

Il valore di S è quello stesso che abbiamo trovato qui innanzi, e quindi indipendente dalla direzione degli assi coordinati. Ponendo poi per compendio di algoritmo

$$S' = \frac{2\alpha b_1 - b_1^2t}{1 + a_1t} + \frac{2\beta b_2 - b_2^2t}{1 + a_2t} + \frac{2\gamma b_3 - b_3^2t}{1 + a_3t},$$

se si riducono i fratti allo stesso denominatore, e si dinota con N il numeratore della frazione risultante, si ottiene

$$N = 2K + K_1t + K_2t^2 + K_3t^3,$$

dove le quantità K, K_1, K_2, K_3 verificano le seguenti equazioni

$$K = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$$

$$K_1 = 2(a_2 + a_3)\alpha b_1 + 2(a_1 + a_3)\beta b_2 + 2(a_1 + a_2)\gamma b_3 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2$$

$$K_2 = 2(a_2 a_3 b_1 \alpha + a_1 a_3 b_2 \beta + a_1 a_2 b_3 \gamma) - \{(a_2 + a_3) b_1^2 + (a_1 + a_3) b_2^2 + (a_1 + a_2) b_3^2\}$$

$$K_3 = a_2 a_3 b_1^2 + a_1 a_3 b_2^2 + a_1 a_2 b_3^2.$$

Ora con facili riduzioni si trova

$$K = L\alpha' + L'\beta' + L''\gamma'$$

$$K_1 = 2(\lambda\alpha' + \lambda'\beta' + \lambda''\gamma') - U^2$$

$$K_2 = 2(\mu\alpha' + \mu'\beta' + \mu''\gamma') - A_1 U^2 + U_1$$

$$K_3 = L^2 P + L'^2 P' + L''^2 P'' + 2LL'Q'' + 2LL''Q' + 2L'L''Q,$$

quando per brevità si pone

$$\lambda = (A_1 - F)L - L'G'' - L''G'; \quad \mu = LP + L'Q'' + L''Q'$$

$$\lambda' = (A_1 - F')L' - LG'' - L''G; \quad \mu' = L'P' + LQ'' + L''Q$$

$$\lambda'' = (A_1 - F'')L'' - LG' - L'G; \quad \mu'' = L''P'' + LQ' + L'Q$$

$$U^2 = L^2 + L'^2 + L''^2$$

$$U_1 = L^2 F + L'^2 F' + L''^2 F'' + 2LL'G'' + 2LL''G' + 2L'L''G.$$

Quindi avremo

$$S' = \frac{2K + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3}{H};$$

e l'espressione del potenziale sarà

$$V = \pi\rho \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{\psi + 2K + Mt + M_1 t^2 - K_3 t^3}{H} \right\} \frac{dt}{\sqrt{H}},$$

dove per abbreviazione di scrittura si è posto

$$M = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) A_2 + K_1 - X$$

$$M_1 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) A_3 + K_2.$$

CAPITOLO VI.

Teoremi di Mac-Laurin, d'Ivory e di Newton.

26. Se poniamo

$$\mu = \frac{h\pi}{3} ABC\rho$$

nell'equazione (14) del capitolo III, avremo

$$W = \frac{3\mu}{4} \int_\sigma^\infty \left(1 - \frac{\alpha^2}{A^2 + t} - \frac{\beta^2}{B^2 + t} - \frac{\gamma^2}{C^2 + t} \right) \frac{dt}{\sqrt{H}} \qquad (7),$$

ritenendo per H il valore attribuitole nel n.° 12°. In questo caso μ è la massa terminata dall'ellissoide, la cui equazione è

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1 \qquad (2).$$

Se μ' è un'altra massa omogenea e della densità ρ' terminata dall'ellissoide.

$$\frac{x'^2}{A'^2}+\frac{y'^2}{B'^2}+\frac{z'^2}{C'^2}=1 \qquad (3),$$

e con W' si dinota ciò che diventa W quando si riferisce a questa seconda massa, si ha

$$W'=\frac{3\mu'}{4}\int_{\sigma'}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{A'^2+t'}-\frac{\beta^2}{B'^2+t'}-\frac{\gamma^2}{C'^2+t'}\right)\frac{dt'}{\sqrt{H'}} \qquad (4).$$

purchè il punto attirato sia lo stesso. Siccome nella (1) il limite inferiore σ è zero se (α, β, γ) è interno rispetto a μ, ovvero è la radice dell'equazione

$$\frac{\alpha^2}{A^2+t}+\frac{\beta^2}{B^2+t}+\frac{\gamma^2}{C^2+t}=1 \qquad (5),$$

che rende positivi i trinomi A^2+t, B^2+t, C^2+t se il detto punto è esterno rispetto alla massa μ attraente; così anche sarà $\sigma_1=0$, ovvero eguale alla radice dell'equazione

$$\frac{\alpha^2}{A'^2+t'}+\frac{\beta^2}{B'^2+t'}+\frac{\gamma^2}{C'^2+t'}=1$$

che rende positivi i trinomi A'^2+t', B'^2+t', C'^2+t', secondo che il punto (α, β, γ) è interno od esterno rispetto alla massa μ'. Ora se si avverte che ponendo $A'^2-A^2=\Delta^2$, $B'^2-B^2=\Delta'^2$, $C'^2-C^2=\Delta''^2$ si ha $A'^2+t'=A^2+\Delta^2+t'$; $B'^2+t'=B^2+\Delta'^2+t'$; $C'^2=C^2+\Delta''^2+t$ potremo tradurre la (2) in

$$W'=\frac{3\mu'}{4}\int_{\sigma'}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{A^2+\Delta^2+t'}-\frac{\beta^2}{B^2+\Delta'^2+t'}-\frac{\gamma^2}{C^2+\Delta''^2+t'}\right)\frac{dt'}{\sqrt{H'_1}} \qquad (7),$$

dinotando H'_1 ciò che diventa H' in seguito di questa sostituzione. E la (4) diventa

$$\frac{\alpha^2}{A^2+\Delta^2+t'}+\frac{\beta^2}{B^2+\Delta'^2+t'}+\frac{\gamma^2}{C^2+\Delta''^2+t'}=1 \qquad (8).$$

Allorchè l'ellissoidi (2) e (3) si suppongono confocali, si ha $\Delta=\Delta'=\Delta''$. In questa ipotesi ponendo $\Delta^2+t'=t''$, l'equazione (8) si traduce in

$$\frac{\alpha^2}{A^2+t''}+\frac{\beta^2}{B^2+t''}+\frac{\gamma^2}{C^2+t''}=1\,;$$

e la radice di questa equazione che rende positivi i trinomi A^2+t'', B^2+t'', C^2+t''

è quella stessa, che si ottiene dalla (5) e rende positivi i trinomi A^2+t, B^2+t, C^2+t. In altri termini in questa ipotesi viene $\sigma'=\sigma$. Inoltre la (7) diventa

$$W'=\frac{3\mu'}{4}\int_\sigma^\infty\left(1-\frac{\alpha^2}{A^2+t''}-\frac{\beta^2}{B^2+t''}-\frac{\gamma^2}{C^2+t''}\right)\frac{dt''}{\sqrt{H''}} \qquad (9),$$

dove $H''=(A^2+t'')(B^2+t'')(C^2+t'')$. Ma l'integrale definito che contiene questa espressione è identico con quello che si contiene nell'espressione di W. Laonde essendo (α, β, γ) punto esterno, risulta

$$\frac{V'_2}{\mu}=\frac{V'_2}{\mu'} \qquad (10),$$

e per conseguenza il seguente teorema: *i potenziali di due masse omogenee terminate da due ellissoidi confocali, e relativi allo stesso punto esterno, sono proporzionali direttamente a queste masse.* Questo teorema è dovuto a Mac-Laurin.

Se dinotiamo con F ed F′ le attrazioni delle masse μ e μ' sul punto (α, β, γ) esterno rispetto ad entrambe, e con f, g, h; f', g', h' gli angoli che le loro direzioni formano coi tre assi delle coordinate si ha

$$(11)\quad\begin{cases} F\cos f=k'^2\dfrac{dV}{d\alpha}; \quad F\cos g=k'^2\dfrac{dV}{d\beta}; \quad F\cos h=k'^2\dfrac{dV}{d\gamma}, \\ F'\cos f'=k'^2\dfrac{dV'}{d\alpha}; \quad F'\cos g'=k'^2\dfrac{dV'}{d\beta}; \quad F'\cos h'=k'^2\dfrac{dV'}{d\gamma}. \end{cases}$$

Dunque avvertendo alla (9) si deduce che *queste forze sono proporzionali alle masse rispettive, ed hanno la stessa direzione.*

27.° Siano X, Y, Z; X′, Y′, Z′ le componenti rispettivamente di F ed F′ parallele ai tre assi delle coordinate, ed avremo in seguito delle (10) ed (11)

$$\frac{X}{X'}=\frac{Y}{Y'}=\frac{Z}{Z'}=\frac{\mu}{\mu'} \qquad (12).$$

Questo risultato ha luogo qualunque sia la distanza del punto esterno (α, β, γ) dalla superficie che terminano le masse μ e μ'. Ora supponiamo che la superficie (2) racchiuda dentro di se la superficie (1), e che il punto (α, β, γ) sia collocato sulla prima di queste superficie: è chiaro che l'equazioni (12) seguiteranno a sussistere. Dunque *le componenti dell'attrazione di due masse terminate da due ellissoidi confocali su di uno stesso punto sono anche proporzionali a queste masse, se il detto punto rimane esterno ad una di siffatte superficie e si trova collocato sull'altra.*

28.° Se il punto $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ si suppone interno rispetto alla superficie (3), l'equazione (9) diventa

$$V'_1=\frac{3\mu'}{4}\int_0^\infty\left(1-\frac{\alpha_1^2}{A^2+t''}-\frac{\beta_1^2}{B^2+t''}-\frac{\gamma_1^2}{C^2+t''}\right)\frac{dt''}{\sqrt{H''}};$$

e dinotando con X_1, Y_1, Z_1 le componenti dell'attrazione parallele ai tre assi delle

coordinate, si ha

$$X_1 = -\frac{3k^2\mu'}{2}\alpha_1\int_0^\infty \frac{dt''}{(A^2+t'')\sqrt{H''}}\,;\quad Y_1 = -\frac{3k^2\mu'}{2}\beta_1\int_0^\infty \frac{dt''}{(B^2+t'')\sqrt{H''}}\,,$$

$$Z_1 = -\frac{3k^2\mu'}{2}\gamma_1\int_0^\infty \frac{dt''}{(C^2+t'')\sqrt{H''}}\,.$$

Siccome gl'integrali contenuti nei secondi membri di quest'equazioni non dipendono dalle coordinate del punto attirato, ne conseguita che *se la massa attraente rimane la medesima, ed il punto attirato rimane dentro di essa, le componenti dell'attrazione variano proporzionalmente alle coordinate di questo punto*. Laonde se $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ sono le coordinate di un altro punto interno a μ', ed X'_1, Y'_1, Z'_1 le componenti dell'attrazione di questa massa sul detto punto si ottiene

$$\frac{X_1}{X'_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha'_1}\,,\quad \frac{Y_1}{Y'_1} = \frac{\beta_1}{\beta'_1}\,,\quad \frac{Z_1}{Z'_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma'_1} \tag{13}$$

Quest'equazioni non cessano di esser vere se la superficie ellissoidale che termina la massa μ' passa per uno dei punti $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$.

Allorchè il punto (α, β, γ) coincide col punto $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e si seguita a supporre che la superficie ellissoidale che termina μ' passa per questo punto, si ha

$$X' = X_1\,,\quad Y' = Y_1\,,\quad Z' = Z_1\,,$$

e quindi risulta dalle (12) e (13)

$$\frac{X}{X'_1} = \frac{\mu\alpha}{\mu'\alpha'_1}\,,\quad \frac{Y}{Y'_1} = \frac{\mu\beta}{\mu'\beta'_1}\,,\quad \frac{Z}{Z'_1} = \frac{\mu\gamma}{\mu'\gamma'_1} \tag{14}$$

Supponiamo adesso che il punto $(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$ interno rispetto a μ' si trovi collocato sulla superficie che termina μ: se questo punto è scelto per modo che le sue coordinate verificano l'equazioni

$$\frac{\alpha'_1}{A} = \frac{\alpha}{A'}\,,\quad \frac{\beta'_1}{B} = \frac{\beta}{B'}\,,\quad \frac{\gamma'_1}{C} = \frac{\gamma}{C'} \tag{15}$$

l'equazioni (14) diventano, se $\rho = \rho'$,

$$\frac{X}{X'_1} = \frac{BC}{B'C'}\,,\quad \frac{Y}{Y'_1} = \frac{AC}{A'C'}\,,\quad \frac{Z}{Z'_1} = \frac{AB}{A'B'} \tag{16}$$

In quest'equazioni è contenuto il famoso teorema d'Ivory, che può essere enunciato come segue: *se due masse μ, μ' di egual densità sono terminate da due ellissoidi confocali, e su queste due superficie si scelgono due punti per modo che le loro coordinate verificano l'equazioni* (15), *la componente dell'attrazione di μ sul punto esterno parallela ad uno degli assi di figura sta all'omonima componente dell'attrazione di μ' sul punto interno, come il prodotto degli altri due semiassi della prima superficie sta al prodotto dei semiassi omonimi dell'altra.*

29.° Supponendo omotetiche le due superficie (2) e (3), e ponendo

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = n$$

si ha evidentemente $\mu' = \frac{4\pi}{3} \rho ABCn^3$

$$H' = n^6 \left(A^2 + \frac{t'}{n^2}\right) \left(B^2 + \frac{t'}{n^2}\right) \left(C^2 + \frac{t'}{n^2}\right);$$

e quindi dinotando con H_1 il coefficiento di n^6, la (4) si traduce in

$$W' = \frac{3\mu'}{4} \int_{\sigma'}^{\infty} \left(n^2 - \frac{\alpha^2}{A^2 + \frac{t'}{n^2}} - \frac{\beta^2}{B^2 + \frac{t'}{n^2}} - \frac{\gamma^2}{C + \frac{t'}{n^2}}\right) \frac{dt'}{n^2 \sqrt{H_1}}.$$

Allorchè il punto (α, β, γ) si suppone interno alle due masse μ, μ', si ha $\sigma = 0$, $\sigma' = 0$, e quindi

$$V'_i - V_i = \frac{3\mu}{4} \int_0^{\infty} \frac{(n^2 - 1)\, dt}{\sqrt{H}} \tag{17}$$

avvertendo che

$$\int_0^{\infty} F\left(\frac{t'}{n^2}\right) \frac{dt'}{n^2} = \int_0^{\infty} F(t)\, dt.$$

Il primo membro dell'equazione (17) è il potenziale della massa limitata dalle due superficie omotetiche (2) e (3), rispetto alle quali è interno il punto (α, β, γ). Dunque *il potenziale di uno strato di materia omogenea limitato da due ellissoidi omotetiche relativo ad un punto posto nel vano dello strato è indipendente dalle coordinate di questo punto.*

Dinotando con U_i il primo membro della equazione (17), risulta

$$U_i = \frac{3\mu}{4} \int_0^{\infty} \frac{(n^2 - 1)\, dt}{\sqrt{H}};$$

ed essendo la funzione contenuta nel 2.° membro di questa equazione indipendente da α, β, γ, se ne deduce

$$\frac{dU_i}{d\alpha} = \frac{dU_i}{d\beta} = \frac{dU_i}{d\gamma} = 0.$$

Dunque *uno strato di materia omogenea compreso fra due ellissoidi omotetiche non esercita alcuna attrazione su di un punto dovunque collocato dentro il vano dello strato medesimo.* Questo teorema è dovuto a Newton.

30.° I tre teoremi dimostrati in questo capitolo possono stabilirsi con altre considerazioni, e quindi si può rannodare ad essi tutta la teorica dell'attrazione delle masse omogenee terminate da superficie chiuse di 2.° grado.

Due punti (x, y, z) (x', y', z') presi rispettivamente sulle superficie (2) e (3) si dicono *corrispondenti* se le loro coordinate verificano l'equazioni

$$\frac{x}{A} = \frac{x'}{A'}, \quad \frac{y}{B} = \frac{y'}{B'}, \quad \frac{z}{C} = \frac{z'}{C'} \tag{18}$$

dalle quali si trae

$$\frac{dx}{A} = \frac{dx'}{A'}, \quad \frac{dy}{B} = \frac{dy'}{B'}, \quad \frac{dz}{C} = \frac{dz'}{C'}.$$

Ora se si prende sulla superficie (3) un punto (x'_1, y'_1, z'_1) e si congiunge col punto (x, y, z) della (2), dinotando con D la distanza di questi due punti si ha

$$D^2 = (x - x'_1)^2 + (y - y'_1)^2 + (z - z'_1)^2.$$

Rimanendo (x', y', z') punto della superficie (3) e *corrispondente* del punto (x, y, z) della superficie (2), sia (x_1, y_1, z_1) il punto di questa superficie che corrisponde ad (x'_1, y'_1, z'_1): detta D_1 la distanza dei due punti (x', y', z'), (x_1, y_1, z_1) avremo ancora

$$D_1^2 = (x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2 + (z_1 - z')^2.$$

Ora essendo in seguito delle (18)

$$x'_1 = \frac{A'x_1}{A}, \quad y'_1 = \frac{B'y_1}{B}, \quad z'_1 = \frac{C'z_1}{C}$$

$$x' = \frac{A'x}{A}, \quad y' = \frac{B'y}{B}, \quad z' = \frac{C'z}{C},$$

otterremo con facili riduzioni

$$D^2 - D_1^2 = \left(\frac{A^2 - A'^2}{A^2}\right)(x^2 - x_1^2) + \left(\frac{B^2 - B'^2}{B^2}\right)(y^2 - y_1^2) + \left(\frac{C^2 - C'^2}{C^2}\right)(z^2 - z_1^2).$$

Se le due superficie (2) e (3), si suppongano confocali, si ha $A^2 - A'^2 = B^2 - B'^2 = C^2 - C'^2$. Quindi avvertendo che i punti (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) appartengono alla superficie stessa, risulta $D = D_1$; e rendesi manifesto il seguente teorema: *la distanza di due punti scelti ad arbitrio su due ellissoidi confocali eguaglia la distanza dei loro punti corrispondenti*.

Ciò posto immaginiamo che due strati ellittici dP, dP' infinitamente sottili, e terminati ciascuno da due ellissoidi simili. Inoltre supponiamo che le superficie che terminano il primo strato siano confocali a quelle che terminano il secondo strato, e che l'equazioni delle superficie esterne dei predetti strati siano rispettivamente (2) e (3). Dividiamo la massa del primo strato dP in elementi infinitamente piccoli $\rho dx\, dy\, dz$, e l'altro strato in elementi infinitamente piccoli $\rho' dx'\, dy'\, dz'$: siccome a ciascun elemento del primo strato si può sempre far *corrispondere* un elemento di dP' così si avrà primieramente

$$dx\, dy\, dz = \frac{ABC}{A'B'C'}\, dx'\, dy'\, dz' \tag{19}$$

Scelgasi sulla superficie (3) un punto (α, β, γ) e si congiunga con ciascuno degli elementi di dP mediante linee rette: dinotando con D una di queste rette, sarà

$$V = \rho \int \frac{dx\, dy\, dz}{D} \qquad (20)$$

il potenziale di dP rispetto al punto (α, β, γ). Sulla superficie (2) si trovi il punto $(\alpha', \beta', \gamma')$ corrispondente di (α, β, γ): se con D′ si dinota la distanza di $(\alpha', \beta', \gamma')$ dall'elemento $\rho' dx' dy' dz'$ di dP' che corrisponde a $\rho\, dx\, dy\, dz$, avremo pel potenziale di questo strato rispetto al punto $(\alpha', \beta', \gamma')$ la seguente espressione

$$V' = \rho' \int \frac{dx'\, dy'\, dz'}{D'} .$$

Ma $D' = D$; onde in seguito della (20) risulta

$$V' : V = \rho' \int dx'\, dy'\, dz' : \rho \int dx\, dy\, dz \qquad (21),$$

Ora dei due strati dP, dP' l'uno è compreso nell'altro. Se dunque supponiamo la superficie (2) interna rispetto alla (3), avremo il seguente teorema: *il potenziale di uno strato ellittico infinitamente sottile rispetto ad un punto interno sta al potenziale di uno strato ellittico infinitamente sottile rispetto ad un punto esterno, come stanno fra loro le rispettive masse, purchè i due strati siano confocali, ed i punti attirati siano punti corrispondenti delle loro superficie esterne.*

31.° Per un punto p collocato comunque nel vano dello strato dP' meniamo una retta a piacimento: è chiaro che su questa retta le due superficie simili, che limitano lo strato, taglieranno due segmenti eguali tra loro. Poichè l'attrazione che una massa elementare qualunque $d\mu$ esercita su di un punto è $\frac{k'^2 d\mu}{D^2}$, ovvero $k'^2\, \rho\, dD\, d\sigma$ come risulta dal n.° 3.° è chiaro che le attrazioni dei due elementi dello strato dP, collocati all'estremità della predetta trasversale sul punto p saranno eguali e contrarie; e quindi la loro risultante sarà nulla. Lo stesso risultato si ottiene per ogni altra posizione che può prendere la trasversale girando intorno al punto p. Quindi *l'attrazione, che uno strato di materia omogenea limitato da due ellissoidi simili ed infinitamente vicine esercita su di un punto collocato comunque nel suo vano, è nulla*. Le componenti di quest'attrazione parallele ai tre assi delle coordinate sono proporzionali alle derivate del potenziale corrispondente prese rispetto alle coordinate del punto attirato. Queste derivate sono per conseguenza anche nulle, ed il potenziale è costante. Dunque il *potenziale di uno strato infinitamente sottile ed omogeneo terminato da due ellissoidi simili, se si riferisce ad un punto comunque collocato nel vano dello strato, è indipendente dalle coordinate di questo punto.* Questo risultato riassume il teorema di Newton.

Anche l'attrazione di uno strato di materia eterogenea e di qualunque spessezza su di un punto collocato comunque nel suo vano è nulla, se le superficie che lo

limitano sono ellissoidi simili, e si compone di strati infinitamente sottili in ciascuno dei quali la densità è costante e le superficie limiti sono ellissoidi simili alle precedenti. Questo teorema è una conseguenza immediata del precedente.

32.° Risulta dal teorema di Newton e dall' equazione (21) che *due strati ellittici* dP, dP_1 *ciascheduno di materia omogenea e confocali tra loro, hanno i potenziali* V, V_1 *relativi allo stesso punto esterno direttamente proporzionali alle loro masse*. Imperocchè siano A_1, B_1, C_1 i semiassi della superficie che limita esternamente dP_1; V'_1 sia il potenziale di dP' rispetto al punto $(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$ che corrisponde ad (α, β, γ) su questa superficie; e suppongasi dP_1 interno a dP': avremo

$$V'_1 : V_1 = \rho' \int dx'\, dy'\, dz' : \rho_1 \int dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Ma $V'_1 = V'$ pel teorema di Newton testè dimostrato. Dunque in seguito della (21) otterremo

$$V : V_1 = \rho \int dx\, dy\, dz : \rho_1 \int dx_1\, dy_1\, dz_1 \qquad (22).$$

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto alla fine del n.° 22.° si deduce da questa proporzione che *le attrazioni di due strati ellittici infinitamente sottili e confocali su di un punto esterno sono proporzionali alle masse degli strati, ed hanno la stessa direzione*. Inoltre allorchè il punto (α, β, γ) percorre la superficie esterna di dP' ovvero la superficie (3), il punto $(\alpha', \beta', \gamma')$ percorre la superficie (2) ovvero la superficie esterna di dP. In altri termini se α, β, γ si considerano come le *coordinate correnti* della superficie (3), anche α', β', γ' saranno le *coordinate correnti*, della superficie (2). Ma V' è costante per tutti i valori che possono prendere le coordinate α', β', γ', e quindi anche costante è V in seguito della (21). Dunque essendo V funzione di α, β, γ, queste coordinate verificano anche l'equazione $V =$ costante. La superficie di livello del potenziale V adunque s'identifica con l'ellissoide che passa per (α, β, γ), ed è confocale alla superficie esterna dallo strato dP, a cui appartiene questo potenziale. E però avvertendo a quanto si è detto nel n.° 3.° risulta chiaro il seguente teorema : l'*attrazioni di due strati ellittici infinitamente sottili e confocali fra loro sullo stesso punto esterno sono dirette secondo la normale condotta per questo punto all' ellissoide confocale che passa pel punto medesimo*.

Dall' equazioni (19) e (22) si deduce

$$V = \frac{\rho ABC}{\rho_1 A_1 B_1 C_1} V_1.$$

Se v, v_1 sono i potenziali di due altri strati infinitamente sottili e confocali tra loro, e si riferiscono allo stesso punto esterno (α, β, γ); ρ, ρ_1 le loro densità; a, b, c; a_1, b_1, c_1 i semiassi delle loro superficie esterne, avremo pure

$$v = \frac{\rho abc}{\rho_1 a_1 b_1 c_1} v_1.$$

Questa equazione si traduce in

$$v = \frac{\rho ABC}{\rho_1 A_1 B_1 C_1} v_1$$

se le superficie esterne di questi strati sono rispettivamente simili alle superficie esterne di dP, dP_1; onde risulta

$$V + v = \frac{\rho ABC}{\rho_1 A_1 B_1 C_1} (V_1 + v_1).$$

E più generalmente se sono dati due sistemi di egual numero di strati confocali ed infinitamente sottili, nel primo dei quali le superficie limiti sono ellissoidi simili alla (2), e nell'altro le superficie limiti sono ellissoidi simili alla (3), si ha

$$\Sigma V = \frac{\rho ABC}{\rho_1 A_1 B_1 C_1} \Sigma V_1 .$$

Ora suppongasi che questi due sistemi di strati formino due ellissoidi pieni limitati rispettivamente dalle superficie (2) e (3), è chiaro che si ottiene il seguente teorema: *due corpi omogenei terminati da due ellissoidi confocali hanno i potenziali relativi allo stesso punto esterno proporzionali direttamente alle loro masse*, che sappiamo essere il teorema di Mac-Laurin.

33.° Se dal punto (α, β, γ) esterno rispetto ad una massa omogenea terminata dalla superficie (2) si mena una trasversale, e si dinotano con D, D_1 i segmenti compresi fra il detto punto ed i punti dove la trasversale incontra la superficie, in seguito dell'equazione (6) trovata nel capitolo I.° si ha

$$-\frac{dV}{d\alpha} = \rho \iint \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right) dz\, dy.$$

Similmente se dal punto $(\alpha', \beta', \gamma')$ interno rispetto ad un'altra massa omogenea e della stessa densità della precedente, la quale è terminata dalla superficie (3) si mena una seconda trasversale, e si dinotano con D', D'_1 i segmenti compresi tra il punto $(\alpha', \beta', \gamma')$ ed i punti dove questa retta incontra la predetta superficie, avremo

$$-\frac{dV'}{d\alpha'} = \rho \iint \left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D'_1}\right) dz'\, dy'.$$

Allorchè i punti (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ appartengono rispettivamente alle superficie (3) e (2) e sono corrispondenti fra loro, ad ogni posizione della prima trasversale si può far *corrispondere* la posizione della seconda trasversale: per guisa che si avrà $D = D'$, $D_1 = D'_1$, e

$$dz\, dy : dz'\, dy' = CB : C'B'$$

per tutta l'estensione dei due sommatori precedenti, e per conseguenza

$$\frac{dV}{d\alpha} : \frac{dV'}{d\alpha'} = CB : C'B'.$$

Similmente avremo

$$\frac{dV}{d\beta} : \frac{dV'}{d\beta'} = AC : A'C',$$

$$\frac{dV}{d\gamma} : \frac{dV'}{d\gamma'} = BA : B'A',$$

nelle quali equazioni è contenuto il teorema d'Ivory.

Poisson ha osservato che il teorema d'Ivory è vero non solo nella ipotesi dell'attrazione Newtoniana, ma anche quando l'attrazione si suppone proporzionale ad una funzione qualunque della distanza. Ed in vero sia F (D) la funzione della distanza, a cui è proporzionale l'attrazione, sarà

$$-\frac{dV}{d\alpha} = \rho\iint\Big[F(D) - F(D_1)\Big]\,dz\,dy$$

$$-\frac{dV'}{d\alpha'} = \rho\iint\Big[F(D') - F(D'_1)\Big]\,dz'dy'.$$

dalle quali equazioni si deduce

$$\frac{dV}{d\alpha} : \frac{dV}{d\alpha'} = CB : C'B'$$

ripetendo il ragionamento che testè abbiamo fatto.

CAPITOLO VII.°

Applicazione dei teoremi precedenti al calcolo dell'attrazione di un'ellissoide piena di materia omogenea.

34.° Si deduce dal teorema di Mac-Laurin che quando si hanno due strati ellittici infinitamente sottili e confocali fra loro, e la superficie esterna di uno di essi passa pel punto (α, β, γ) esterno rispetto all'altro, basta saper calcolare l'attrazione del primo strato sul punto predetto per ottenere immediatamente l'attrazione del secondo strato sullo stesso punto. In altri termini mediante il teorema di Mac-Laurin l'attrazione di uno strato ellittico su di un punto esterno è data, quando è data l'attrazione di uno strato confocale, la cui superficie esterna passa pel detto punto, sul punto medesimo. Ora questo secondo problema, seguendo le tracce di Chasles, può risolversi nel seguente modo. Supponiamo che degli strati dP, dP', il primo sia interno al secondo; che l'equazioni delle loro superficie esterne siano le (2) e (3) del capitolo precedente; e che quest'ultima superficie passi pel punto attirato (α, β, γ). Siano q', q'_1 i segmenti, che le superficie da cui è limitata dP' tagliano su di una corda K' condotta pel punto attirato: essendo queste superficie simili ed indefinitamente vicine, sarà $q' = q'_1$, e le attrazioni dei due elementi del detto strato posti all'estremità della corda avranno per risultante $2k'^2\rho q' d\sigma$, essendo forze cospiranti. La proiezione di questa risultante sulla normale alla superficie (3) condotta nel punto (α, β, γ) è evidentemente $2k'^2\rho q' \cos\psi' d\sigma$, dinotando ψ' l'angolo

che essa normale forma con la corda K'. Ma $q'\cos\psi'$ eguaglia la porzione della stessa normale compresa fra le due superficie che limitano dP'; ondo dinotando con dN' questo segmento, la risultante predetta si può esprimere anche per $2k'^2\rho dN'd\sigma$. Se R' e P' dinotano il raggio condotto dal centro della superficie (3) al punto (α,β,γ), e la perpendicolare condotta dallo stesso centro sul piano che tocca la superficie (3) nel detto punto, sarà $dN' : dR' = P' : R'$. Quindi posta $dF' = 2k'^2\rho dN'd\sigma$, sarà pure

$$dF' = 2k'^2\rho\,\frac{P'dR'}{R'}\,d\sigma\,;$$

e l'attrazione F' di tutto lo strato si avrà dalla equazione

$$F' = \frac{2k'^2\rho P'dR'}{R'}\int_0^{2\pi} d\sigma = \frac{4k'^2\pi\rho P'dR'}{R'}\,.$$

Questa forza è diretta secondo la normale predetta. Le sue componenti parallele ai tre assi delle coordinate si ottengono moltiplicando rispettivamente F' per $-\frac{\alpha P'}{A'^2}$, $-\frac{\beta P'}{B'^2}$, $-\frac{\gamma P'}{C'^2}$, che sono i coseni degli angoli formati da P' con questi assi. Laonde denominando dX', dY', dZ' queste componenti, avremo

$$\left.\begin{aligned} dX' &= -4k'^2\pi\rho\alpha\,\frac{P'^2dR'}{A'^2R'} \\ dY' &= -4k'^2\pi\rho\beta\,\frac{P'^2dR'}{B'^2R'} \\ dZ' &= -4k'^2\pi\rho\gamma\,\frac{P'^2dR'}{C'^2R'} \end{aligned}\right\} \qquad (1).$$

Per ottenere le attrazioni dello strato dP sullo stesso punto (α,β,γ) non bisogna altro che moltiplicare i secondi membri di questa equazione per $\frac{ABC}{A'B'C'}$.

35.° Proponiamoci adesso di trovare le componenti dell'attrazione di un'ellissoide piena di materia omogenea su di un punto esterno (α,β,γ), e sia

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \qquad (2)$$

l'equazione di questa superficie. Dividiamo la massa proposta a strati infinitamente sottili per mezzo di superficie simili alla (2), e dinotiamo con a, b, c; $a-da$, $b-db$, $c-dc$ i semi-assi di due superficie che limitano uno di questi strati. Siano poi a', b', c', $a'-da'$, $b'-db'$, $c'-dc'$ i semi-assi delle superficie che limitano lo strato confocale al predetto strato, e la cui superficie esterna passi per (α,β,γ). Le componenti dell'attrazione di questo secondo strato sul punto (α,β,γ) in se-

guito delle (1) souo

$$dX' = -4k'^2\pi\rho\alpha \frac{P'^2 dR'}{a'^2 R'}$$

$$dY' = -4k'^2\pi\rho\beta \frac{P'^3 dR'}{b'^2 R'}$$

$$dZ' = -4k'^2\pi\rho\gamma \frac{P'^3 dR'}{c'^2 R'}$$

Dinotando dunque con dX, dY, dZ le componenti dell' attrazione dello strato chiuso nelle superficie de' semi-assi a, b, c, $a-da$, $b-db$, $c-dc$ sullo stesso punto avremo

$$\left.\begin{aligned} dX &= -4k'^2\pi\rho\alpha \frac{abc}{a'b'c'}\frac{P'^2 dR'}{a'^2 R'} \\ dY &= -4k'^2\pi\rho\beta \frac{abc}{a'b'c'}\frac{P'^2 dR'}{b'^2 R'} \\ dZ &= -4k'^2\pi\rho\gamma \frac{abc}{a'b'c'}\frac{P'^2 dR'}{c'^2 R'} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ora essendo confocali le duo superficie de' semi-assi a, b, c; a', b', c', e dovendo quest' ultima passare pel punto (α, β, γ), se si pone $a'^2 = a^2 + p$, $b'^2 = b^2 + p$, $c'^2 = c^2 + p$, avremo l' equazione

$$\frac{\alpha^2}{a^2+p} + \frac{\beta^2}{b^2+p} + \frac{\gamma^2}{c^2+p} = 1. \qquad (4)$$

Siano l, l', l'' gli angoli che R' forma coi tre assi delle coordinate; ed essendo $\alpha = R'\cos l$, $\beta = R'\cos l'$, $\gamma = R'\cos l''$, questa equazione si traduce in

$$R'^2\left(\frac{\cos^2 l}{a^2+p} + \frac{\cos^2 l'}{b^2+p} + \frac{\cos^2 l''}{c^2+p}\right) = 1.$$

La variazione che subisce R', quando rimane costante la sua direzione e si passa dalla superficie (4) alla superficie infinitamente vicina e confocale, sarà per conseguenza data dall' equazione

$$\frac{2\,dR'}{R'} = \frac{dp}{P'^2}.$$

Sostituendo nelle (3) avremo

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} dX &= -2k'^2\pi\rho\alpha\, abc \frac{dp}{(a^2+p)\sqrt{(a^2+p)(b^2+p)(c^2+p)}} \\ dY &= -2k'^2\pi\rho\beta\, abc \frac{dp}{(b^2+p)\sqrt{(a^2+p)(b^2+p)(c^2+p)}} \\ dZ &= -2k'^2\pi\rho\gamma\, abc \frac{dp}{(c^2+p)\sqrt{(a^2+p)(b^2+p)(c^2+p)}}. \end{aligned}\right.$$

Allorchè si suppone $a = hA$, $b = hB$, $c = hC$, tutte l'ellissoidi simili alla (2) e comprese dentro di essa possono esser rappresentate dall'equazione

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = h^2,$$

facendo variare h con legge continua da zero sino all'unità. Nella stessa ipotesi se si pone $p = h^2 t$, la (4) diventa

$$\frac{\alpha^2}{A^2 + t} + \frac{\beta^2}{B^2 + t} + \frac{\gamma}{C^2 + t} = h^2, \tag{6}$$

e si trasformano le (5) in

$$\left.\begin{aligned} dX &= -\frac{3}{2} k'^2 \mu \alpha \frac{dt}{(A^2 + t)\sqrt{H}} \\ dY &= -\frac{3}{2} k'^2 \mu \beta \frac{dt}{(B^2 + t)\sqrt{H}} \\ dZ &= -\frac{3}{2} k'^2 \mu \gamma \frac{dt}{(C^2 + t)\sqrt{H}} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

supponendo per brevità $H = (A^2 + t)(B^2 + t)(C^2 + t)$, ed avvertendo che $\mu = \frac{4\pi\rho\, abc}{3}$.
È evidente che gl'integrali delle (7) presi fra i valori limiti di t che corrispondono ad $h = 0$ ed $h = 1$ danno i cercati valori di X, Y, Z. Ma ponendo $h = 0$, $h = 1$ nella (6) si ha rispettivamente $t = \infty$, $t = \tau$, dinotando τ il valore di t che rende positivi i trinomi $A^2 + t$, $B^2 + t$, $C^2 + t$. Quindi avremo

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{3}{2} k'^2 \mu \alpha \int_\tau^\infty \frac{dt}{(A^2 + t)\sqrt{H}} \\ Y &= -\frac{3}{2} k'^2 \mu \beta \int_\tau^\infty \frac{dt}{(C^2 + t)\sqrt{H}} \\ Z &= -\frac{3}{2} k'^2 \mu \gamma \int_\tau^\infty \frac{dt}{(C^2 + t)\sqrt{H}} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

per le componenti dell'attrazione dell'ellissoide proposto sul punto esterno (α, β, γ), come più innanzi abbiamo trovato.

36.° Dall'equazione (8) si passa senza difficoltà alcuna all'equazioni, che determinano l'attrazione del proposto ellissoide su di un punto o collocato sulla sua superficie o nel suo interno. Quando il punto attirato (α, β, γ) è collocato sulla superficie (2), le sue coordinate debbono verificare l'equazione

$$\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2} = 1,$$

la quale paragonata con la (6), dopo di avervi posto $h = 1$, porge $\tau = 0$. Dunque

le componenti dell'attrazione di un'ellissoide piena di materia omogenea su di un punto della superficie stessa si avranno dall'equazioni (8), poneudovi $\tau = 0$. Quando poi il punto (α, β, γ) si suppone far parte della massa predetta, è sempre possibile di descrivere un'ellissoide simile alla (2) che passi pel punto attirato. Questa superficie, i cui semi-assi supporremo essere Ah_1, Bh_1, Ch_1, ove $h_1 < 1$, dividerà la massa μ in due parti μ_1, μ_2, delle quali la prima riempirà la superficie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = h_1^2,$$

e l'altra riempirà lo spazio compreso tra questa medesima superficie e la superficie (2). Lo strato ellittico μ_2 non eserciterà attrazione alcuna sul punto (α, β, γ), che può considerarsi come posto nel vano che rimane dentro di esso quando si toglie via la massa μ_1. Quindi le componenti dell'attrazione della massa μ in questa ipotesi sul punto (α, β, γ) sono identiche con le componenti della massa μ_1 sullo stesso punto. Queste componenti sono

$$X_1 = -\frac{3}{2} k'^2 \mu_1 \alpha \int_0^\infty \frac{dt}{(A^2 h_1^2 + t)\sqrt{H_1}}$$

$$Y_1 = -\frac{3}{2} k'^2 \mu_1 \beta \int_0^\infty \frac{dt}{(B^2 h_1^2 + t)\sqrt{H_1}}$$

$$Z_1 = -\frac{3}{2} k'^2 \mu_1 \gamma \int_0^\infty \frac{dt}{(C^2 h_1^2 + t)\sqrt{H_1}}.$$

dinotando H_1 ciò che diventa H quando per A, B, C si sostituiscono Ah_1, Bh_1, Ch_1. Se si pone $t = h_1^2 t'$, e con H' si dinota il prodotto

$$(A^2 + t')\ (B^2 + t')\ (C^2 + t'),$$

avremo evidentemente

$$X_1 = -\frac{3}{2} k'^2 \mu \alpha \int_0^\infty \frac{dt'}{(A^2 + t')\sqrt{H'}}$$

$$Y_1 = -\frac{3}{2} k'^2 \mu \beta \int_0^\infty \frac{dt'}{(B^2 + t')\sqrt{H'}}$$

$$Z_1 = -\frac{3}{2} k'^2 \mu \gamma \int_0^\infty \frac{dt'}{(C^2 + t')\sqrt{H'}}.$$

Ma gl'integrali contenuti nei secondi membri di quest'equazioni hanno gli stessi valori degl'integrali contenuti nelle (8) quando vi si pone $\tau = 0$. Dunque l'equazioni (8), quando $\tau = 0$, porgono i valori delle componenti dell'attrazione, che una massa omogenea terminata da un'ellissoide esercita sul punto (α, β, γ) o che questo punto sia collocato su tale superficie, o che faccia parte della massa attraente.

37.° Soggiungiamo un altro metodo non meno elegante, e che si riattacca ai teoremi di Mac-Laurin e d'Ivory, per calcolare l'attrazione degli sferoidi di secondo

grado. Se nelle due equazioni

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=h^2; \quad x_1^2+y_1^2+z_1^2=h^2 \tag{9}$$

facciamo variare per gradi infinitesimi h, si ottengono due sistemi di superficie simili: il primo sistema si compone di ellissoidi, l'altro di sfere, com'è evidente. Una superficie del primo sistema si dirà *conjugata* ad una superficie dell'altro sistema quando entrambe dipendono da uno stesso valore di h. Similmente diremo uno strato compreso fra due superficie infinitamente vicine del primo sistema essere *conjugato* ad uno strato compreso fra due superficie infinitamente vicine del secondo sistema, quando le superficie limiti del primo strato sono *coniugate* alle superficie limiti del secondo strato. Ora se si pone

$$\frac{x}{A}=x_1, \quad \frac{y}{B}=y_1, \quad \frac{z}{C}=z_1,$$

ogni punto di una superficie qualunque del primo sistema ha il suo *corrispondente* sulla superficie coniugata; ed ogni elemento del volume di uno strato del primo sistema è ligato al *corrispondente* volume elementare dello strato coniugato mediante la relazione

$$dx\,dy\,dz=\mathrm{ABC}\,dx_1\,dy_1\,dz_1 \tag{10}$$

Inoltre si congiungano i punti corrispondenti (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) col centro comune delle superficie (9). Due piramidi infinitamente sottili, che hanno i vertici in questo punto, gli assi diretti secondo queste congiungenti, e le basi sulle predetto superficie, si compongono di elementi corrispondenti; e quindi i loro volumi sono nel rapporto di $\mathrm{ABC}:1$. Il volume della prima piramide, che termina alla superficie dell'ellissoide, è $\frac{1}{3}\mathrm{P}d\mathrm{S}$, dinotando P la perpendicolare condotta dal vertice della stessa sul piano che tocca l'ellissoide nel punto (x, y, z); ed il volume della piramide che termina alla sfera è $\frac{1}{3}h^3d\sigma$, dinotando $d\sigma$ l'elemento di superficie della sfera di raggio $=1$ compreso in questa seconda piramide. Laonde

$$\mathrm{P}d\mathrm{S}=\mathrm{ABC}\,h^3d\sigma \tag{11}$$

Ma $dx_1\,dy_1\,dz_1=h^2dhd\sigma$, onde sostituendo questo valore nella (10), ed associando questa equazione alla (11) avremo

$$dx\,dy\,dz=\frac{\mathrm{P}\,dh\,d\mathrm{S}}{h} \tag{12}$$

Quindi il potenziale di una massa ellissoidale di densità costante si avrà dall'equazione

$$\mathrm{V}=\rho\iint\frac{\mathrm{P}\,d\mathrm{S}\,dh}{h\mathrm{D}} \tag{13}$$

Se l'equazione della superficie che termina la massa si suppone essere data dall'equazione

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1 \tag{14}$$

l'integrazione rispetto ad h va eseguita fra i limiti $h=0$ ed $h=1$.

38.° Se dinotiamo con

$$\frac{x'^2}{A'^2}+\frac{y'^2}{B'^2}+\frac{z'^2}{C'^2}=1 \tag{15}$$

l'equazione di un'ellissoide confocale alla (14), il potenziale di una massa terminata da questa superficie, e della densità costante ρ, sarà dato dalla equazione

$$V'=\rho\frac{A'B'C'}{ABC}\iint\frac{P\,dS\,dh}{hD'}.$$

Le quantità D e D' dinotano le distanze del punto attirato dalle masse elementari $\rho\,dx\,dy\,dz$, $\rho\,dx'\,dy'\,dz'$. Quindi avremo

$$\frac{V'}{A'B'C'}-\frac{V}{ABC}=\frac{\rho}{ABC}\iint\left(\frac{1}{D'}-\frac{1}{D}\right)\frac{P\,dS\,dh}{h}.$$

Se le superficie (14) e (15) sono infinitamente vicine, supponendo $D'=D+\delta D$, avremo

$$\delta\left(\frac{V}{ABC}\right)=-\frac{\rho}{ABC}\iint\frac{P\delta D\,dS\,dh}{hD^2} \tag{16}.$$

Il teorema di Mac-Laurin insegna che questa equazione si riduce alla identità $0=0$, quando il punto attirato è esterno rispetto alle superficie (14) e (15), allorchè il detto teorema viene associato al seguente teorema di Gauss.

Se una superficie chiusa S si proietta sulla superficie di una sfera di raggio $=1$ per mezzo di rette convergenti al centro di questa sfera, la proiezione sarà -4π, -2π, o zero secondo che siffatto punto si trova dentro di S, o sopra questa superficie o fuori di essa. Imperocchè se si dinota con (ND) l'angolo che la normale interna di S forma con la direzione, nella quale D aumenta, siccome questo angolo è acuto od ottuso secondo che D entra o sorte dalla detta superficie; così avremo

$$\pm\,d\sigma=\frac{dS}{D^2}\cos(ND),$$

come risulta dall'equazione (10) del capitolo I. Allorchè il centro della sfera di raggio 1, ovvero il centro della sfera σ, è interno rispetto ad S, il numero delle uscite di D in ogni direzione, che può aver questa retta, eguaglia il numero delle entrate più uno; onde la somma degli elementi $\frac{dS}{D^2}\cos(ND)$ in ciascuna direzione di D eguaglia un solo elemento $-d\sigma$, e però in questa ipotesi si ha

$$-4\pi=\int\frac{dS}{D^2}\cos(ND),$$

estendendo l'integrale a tutta la superficie S. Al contrario se il centro della sfera σ giace fuori della superficie S, il numero delle uscite di D pareggia il numero delle entrate, qualunque sia la direzione di questa retta; e per conseguenza la somma degli elementi $\frac{dS}{D^2}\cos(ND)$ corrispondente a ciascuna direzione è nulla. Finalmente quando il centro della sfera σ è collocato in un punto di S, se per questo punto si conduce un piano tangente alla stessa superficie S, la sfera σ ne viene tagliata in due parti eguali. Ed in questa ipotesi alle direzioni di D comprese in una metà di σ corrisponde un numero di uscite eguale al numero delle entrate; ed a ciascuna direzione della stessa retta compresa nell'altra metà corrisponde un numero di entrate eguale al numero delle uscite meno una. Dunque gli elementi $\frac{dS}{D^2}\cos(ND)$ corrispondenti a ciascuna direzione di D nella prima metà di σ hanno per somma zero, e nell'altra metà hanno per somma $-d\sigma$; e per conseguenza in tal caso

$$-2\pi=\int\frac{dS}{D^2}\cos(ND).$$

39.° Premesse queste cose, supponiamo che δN sia la porzione della normale menata pel punto (x, y, z) alla superficie ellissoidale (9) compresa tra questa superficie stessa e la sua confocale infinitamente vicina: sarà $\delta D=-\delta N\cos(ND)$, come può verificarsi mediante una costruzione geometrica molto semplice. Sostituendo questo valore nella (16) si ottiene

$$\delta\left(\frac{V}{ABC}\right)=\frac{\rho}{ABC}\iint\frac{P\cos(ND)\,\delta N\,dS\,dh}{hD^2} \tag{17}.$$

Inoltre supponiamo che

$$\frac{x'^2}{A^2+t}+\frac{y'^2}{B^2+t}+\frac{z'^2}{C^2+t}=h^2 \tag{18}$$

sia l'equazione del sistema delle ellissoidi confocali al sistema di ellissoidi che corrisponde alla prima delle (9). Il raggio R condotto dal centro dell'ellissoide (9) al punto (x, y, z), allorchè non cangia di direzione e si prolunga sino all'ellissoide confocale infinitamente vicina, subisce la variazione δR che verifica l'equazione

$$\frac{2\,\delta R}{R}=\frac{h^2\delta t}{P^2}.$$

Difatti ponendo $x=R\cos\lambda$, $y=R\cos\lambda'$, $z=R\cos\lambda''$ nella prima delle (9), $x'=R'\cos\lambda$, $y'=R'\cos\lambda'$, $z'=R'\cos\lambda''$ nella (18), se t diventa δt si ha

$$\frac{2\delta R}{R}=\left[\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}\right]\frac{dt}{h^2}=\frac{h^2\delta t}{P^2},$$

avvertendo che δt è quantità infinitamente piccola, e che in tale ipotesi dev'essere $R'=R+\delta R$. Dunque essendo $\delta N=\frac{P\delta R}{R}$, avremo

$$\delta N=\frac{1}{2}\frac{h^2\delta t}{P};$$

e sostituendo nella (17) risulterà

$$\delta\left(\frac{V}{ABC}\right)=\frac{\rho\delta t}{2ABC}\int h\,dh\int\frac{\cos(XD)\,dS}{D^2}. \qquad (19).$$

Ora se il punto attirato è posto fuori la superficie (14), sarà esterno ancora rispetto a tutto il sistema delle superficie che rappresenta la prima delle (9) facendo variare h da zero sino all'unità. In questa ipotesi avremo pel teorema di Gauss

$$\int\frac{\cos(XD)\,dS}{D^2}=0,$$

il che conferma quanto abbiamo detto nel n.° 38.

40.° Allorquando però il punto attirato è interno rispetto all'ellissoide (9) si ha

$$\int\frac{\cos(XD)\,dS}{D^2}=-4\pi,$$

e la (19) si traduce in

$$\delta\left(\frac{V}{ABC}\right)=-\frac{2\pi\rho\delta t}{ABC}\int h\,dh \qquad (20),$$

avvertendo che l'integrazione indicata nel secondo membro di questa equazione deve estendersi ai soli valori di h, i quali determinano ellissoidi, rispetto a cui il punto attirato è interno. Dunque se h_1 è il valore di h che nel sistema dell'ellissoidi (9) determina la superficie che passa pel punto attirato (α, β, γ), dovendo essere

$$\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{B^2}+\frac{\gamma^2}{C^2}=h_1^2,$$

la (20) si trasforma in

$$\delta\left(\frac{V}{ABC}\right)=-\frac{\pi\rho\delta t}{ABC}\left[1-\frac{\alpha^2}{A^2}-\frac{\beta^2}{B^2}-\frac{\gamma^2}{C^2}\right] \qquad (21).$$

Questa equazione porge *il valore del potenziale di una massa omogenea limitata dalla superficie*

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1$$

e da una superficie confocale infinitamente vicina diviso pel prodotto dei semiassi A, B, C *quando il punto attirato è interno.*

L'equazione (21) non cessa di esser vera se A^2, B^2, C^2 si cangiano rispettivamente in A^2+t, B^2+t, C^2+t; onde ponendo come per il solito

$$H=(A^2+t)(B^2+t)(C^2+t),$$

e mutando la caratteristica δ in d avremo

$$d\left(\frac{V}{\sqrt{H}}\right)=-\frac{\pi\rho\,dt}{\sqrt{H}}\left[1-\frac{\alpha^2}{A^2+t}-\frac{\beta^2}{B^2+t}-\frac{\gamma^2}{C^2+t}\right].$$

Integrando fra i limiti $t=0$, $t=\infty$ si ottiene

$$(22)\qquad \left(\frac{V}{\sqrt{H}}\right)_\infty - \left(\frac{V}{\sqrt{H}}\right)_0 = -\pi\rho\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{H}}\left[1-\frac{\alpha^2}{A^2+t}-\frac{\beta^2}{B^2+t}-\frac{\gamma^2}{C^2+t}\right].$$

Ora si avverta che se una massa è terminata da una superficie sferica, ed il punto attirato è posto dentro di questa superficie, la funzione $\frac{V}{\sqrt{H}}$ verifica l'equazione

$$\frac{V}{\sqrt{H}} = \frac{2\pi R_0^2 - \frac{2}{3}\pi l^2}{R_0^2},$$

dinotando R_0 il raggio della sfera, ed l^2 il quadrato della distanza del punto attirato dall'origine. Ma quando $t=\infty$, la superficie a cui si riferisce $\left(\frac{V}{\sqrt{H}}\right)_\infty$ è una sfera di raggio infinito. Quindi sarà

$$\left(\frac{V}{\sqrt{H}}\right)_\infty = \lim : \frac{2\pi R_0^2 - \frac{2}{3}\pi l^2}{R_0^2} = 0\,;$$

e per conseguenza la (22) diventerà

$$(23)\qquad V_i = ABC\pi\rho\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{H}}\left[1-\frac{\alpha^2}{A^2+t}-\frac{\beta^2}{B^2+t}-\frac{\gamma^2}{C^2+t}\right].$$

Questa equazione determina il potenziale di una massa omogenea terminata da una superficie ellissoidale relativo ad un punto collocato comunque nell'interno di questa superficie; nè cessa di esser vera se il punto attirato è posto sulla superficie stessa.

41.° Vediamo adesso come dall'equazione (23) possa risalirsi a quella che determina il potenziale della stessa massa rispetto ad un punto esterno. Allorchè il punto (α,β,γ) è posto fuori della superficie ellissoidale

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1 \qquad (24)$$

che termina la massa attraente, si può sempre costruire un'ellissoide che passi pel punto predetto e che sia confocale alla (24). Se dinotiamo con A', B', C' i semi-assi di questa novella superficie, e con V' il suo potenziale relativo al punto (α,β,γ), avremo in seguito della (23)

$$\frac{V'}{A'B'C'} = \pi\rho\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{H'}}\left[1-\frac{\alpha^2}{A'^2+t}-\frac{\beta^2}{B'^2+t}-\frac{\gamma^2}{C'^2+t}\right]$$

dove H' è ciò che diventa H quando A, B, C sono sostituiti da A', B', C'. Ma se con V_e si dinota il potenziale della massa terminata dalla superficie (24) relativo allo stesso punto (α,β,γ) si ha pel teorema di Mac-Laurin

$$\frac{V_e}{ABC} = \frac{V'}{A'B'C'}\,;$$

ónde la precedente equazione porge

$$V_e = ABC\pi\rho \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{H'}} \left[1 - \frac{\alpha^2}{A'^2 + t} - \frac{\beta^2}{B'^2 + t} - \frac{\gamma^2}{C'^2 + t}\right].$$

Appartenendo i semiassi A,B,C; A',B',C' a due ellissoidi confocali, possiamo supporre

$$A'^2 - A^2 = B'^2 - B^2 = C'^2 - C^2 = \tau;$$

onde se per brevità si pone $\tau + t = t_1$,

$$H_1 = (A^2 + t_1)\ (B^2 + t_1)\ (C^2 + t_1),$$

e si avverte che a $t = 0$ corrisponde $t_1 = \tau$, ed a $t = \infty$ corrisponde $t_1 = \infty$, avremo

$$V_e = ABC\pi\rho \int_\tau^\infty \frac{dt_1}{\sqrt{H_1}} \left[1 - \frac{\alpha^2}{A^2 + t_1} - \frac{\beta^2}{B^2 + t_1} - \frac{\gamma^2}{C^2 + t_1}\right],$$

e ciò che vale stesso

$$V_e = ABC\pi\rho \int_\tau^\infty \frac{dt}{\sqrt{H}} \left[1 - \frac{\alpha^2}{A^2 + t} - \frac{\beta^2}{B^2 + t} - \frac{\gamma^2}{C^2 + t}\right],$$

come altrove abbiamo trovato. Siccome la superficie de' semi-assi A', B', C' passa pel punto (α, β, γ), così è chiaro che τ si avrà dall'equazione

$$\frac{\alpha^2}{A^2 + \tau} + \frac{\beta^2}{B^2 + \tau} + \frac{\gamma^2}{C^2 + \tau} = 1.$$

Questa soluzione del problema che concerne l'attrazione degli sferoidi omogenei di 2.° grado rientra in quelle date da Gauss e da Olindo Rodriques, ed è stata così ridotta da Cayley.

CAPITOLO VIII.

Teorema di Green. Attrazione degli strati di livello.

42.° Siano U, V due funzioni delle coordinate x, y, z, e tali che non diventino infinite per alcun punto (x, y, z) di uno spazio C limitato da una superficie chiusa e convessa S. Poichè dalla identità

$$\frac{d}{dx}\left(U \frac{dV}{dx}\right) = \frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + U \frac{d^2V}{dx^2}$$

ricavasi

$$U \frac{dV}{dx} = \int \frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}\, dx + \int U \frac{d^2V}{dx^2}\, dx \qquad (1):$$

se nel secondo membro di questa equazione gl'integrali si estendono a tutti i punti comuni a C e ad una retta parallela all'asse delle x, il primo membro di questa equazione sarà la differenza dei valori che $U \frac{dV}{dx}$ acquista nei due punti d'interse-

zione della linea predetta con la superficie S. Ciò accade se C non offre alcuna interruzione nel suo interno. Quando però C offre nel suo interno delle interruzioni, ma queste sono anche determinate da superficie chiuse e convesse; il primo membro della (1) è la somma algebrica di tutti i valori, che $U\frac{dV}{dx}$ acquista nelle *uscite* della retta in discorso, attraversando C, diminuita della somma algebrica di tutti i valori, che prende la stessa funzione nell'*entrate* della predetta linea. Dinotiamo una qualunque di queste somme algebriche con $\Sigma\varepsilon U\frac{dV}{dx}$, e conveniamo che ε debba essere $+1$ nelle *uscite* della retta parallela all'asse delle x che attraversa C, e -1 nelle *entrate* della medesima retta. Siccome la (1) in questa ipotesi diventa

$$\sum\varepsilon U\frac{dV}{dx}=\int\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}dx+\int U\frac{d^2V}{dx^2}dx;$$

così moltiplicando per $dy\,dz$, ed integrando avremo

$$\sum\varepsilon\iint U\frac{dV}{dx}dy\,dz=\iiint\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}dx\,dy\,dz+\iiint U\frac{d^2V}{dx^2}dx\,dy\,dz.$$

Nel primo membro di questa equazione le integrazioni debbono estendersi esclusivamente ai soli punti appartenenti alle superficie che determinano C. Per contrario le integrazioni indicate nel secondo membro vanno estese a tutti i punti di C. Troveremo similmente

$$\sum\varepsilon\iint U\frac{dV}{dy}dz\,dx=\iiint\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}dx\,dy\,dz+\iiint U\frac{d^2V}{dy^2}dx\,dy\,dz,$$

$$\sum\varepsilon\iint U\frac{dV}{dz}dx\,dy=\iiint\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}dx\,dy\,dz+\iiint U\frac{d^2V}{dz^2}dx\,dy\,dz.$$

Addizionando queste tre equazioni si ottiene

$$\left.\begin{array}{l}\sum\varepsilon\iint U\left(\frac{dV}{dx}dy\,dz+\frac{dV}{dy}dz\,dx+\frac{dV}{dz}dx\,dy\right)=\\ \int\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dU}{dz}\right)dq+\int U\Delta^2V\,dq\end{array}\right\}\quad(2),$$

dove per brevità si è posto $dq=dx\,dy\,dz$. Ora siano λ, μ, ν gli angoli che la parte esterna della normale condotta ad S, o ad una delle superficie S, nel punto (x, y, z) fa con i tre assi delle coordinate: posto $=dS$ l'elemento superficiale che trovasi in questo punto, avremo evidentemente

$$dy\,dz=\cos\lambda\,dS,\quad dz\,dx=\cos\mu\,dS,\quad dx\,dy=\cos\nu\,dS.$$

Gli angoli λ, μ, ν sono ottusi quando (x, y, z) è punto di entrata, e per converso

sono acuti quando lo stesso punto è punto di uscita. Ma nel primo caso ε è quantità negativa, e nell'altro caso è positiva. Laonde il trinomio

$$\varepsilon\left(\frac{dV}{dx}dy\,dz+\frac{dV}{dy}dz\,dx+\frac{dV}{dz}dx\,dy\right)$$

in tutti e due i casi si traduce in

$$\left(\frac{dV}{dx}\cos\lambda+\frac{dV}{dy}\cos\mu+\frac{dV}{dz}\cos\nu\right)dS,$$

o più semplicemente in $\frac{dV}{dN}dS$; poichè, dinotando con N la predetta normale, si ha

$$\cos\lambda=\frac{dx}{dN},\quad \cos\mu=\frac{dy}{dN},\quad \cos\nu=\frac{dz}{dN}.$$

Ciò posto l'equazione (2) diventa

$$\int\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dU}{dz}\right)dq=\Sigma\int U\frac{dV}{dN}dS-\int U\Delta^2 V dq.$$

Mutando U in V e reciprocamente, il primo membro di questa equazione rimane immutato. Laonde avvertendo a ciò che per questo scambio diventa il secondo membro, sarà permesso conchiuderne quest'altra equazione

$$\sum\int\left(U\frac{dV}{dN}-V\frac{dU}{dN}\right)dS=\int\left(U\Delta^2V-V\Delta^2U\right)dq \qquad (3).$$

43.° Supponiamo adesso che una delle funzioni U, V diventi infinita in un punto (x_0, y_0, z_0) di C, e cerchiamo come debba modificarsi la (3) in questa ipotesi. Sia $\frac{1}{r}$ il valore di U nelle vicinanze del punto (x_0, y_0, z_0), e quindi

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

Immaginiamo che col centro (x_0, y_0, z_0) e con un raggio piccolissimo τ si descriva una sfera: è chiaro che la equazione (3) sarà vera per tutti i punti di C, meno i punti contenuti in questa sfera. Perciò l'equazione cercata sarà la somma detta (3) estesa a tutti i punti esterni alla predetta sfera, e della equazione in cui si cangia la stessa (3) quando si applica ai soli punti della sfera. Ora essendo $U=\frac{1}{r}$, $r\leq\tau$, il trinomio Δ^2U è nullo nella estensione di tutta la sfera, poichè si ha,

$$\frac{d^2U}{dx^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x_0)^2}{r^5};\ \frac{d^2U}{dy^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y_0)^2}{r^5},\ \frac{d^2U}{dz^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z_0)^2}{r^5}.$$

Inoltre se dinotiamo con Δ^2V_0 il medio dei valori di Δ^2V, relativi agli stessi punti, otteniamo

$$\int U\Delta^2V dq=\Delta^2V_0\int\frac{dq}{\tau}=\frac{4\pi}{3}\tau^2\Delta^2V_0,$$

essendo $dq = r^2 dr\, d\sigma$. Finalmente essendo $dS = r^2 d\sigma$ nello stesso ambito della sfera, e $\frac{dU}{dN} = \frac{dU}{dr} = -\frac{1}{r^2}$, sarà

$$\int U \frac{dV}{dN} dS = \frac{dV_0}{dN} 4\pi\rho\ ; \quad \int V \frac{dU}{dN} dS = -4\pi V_0,$$

dove $\frac{dV_0}{dN}$, V_0 sono i medî dei valori di $\frac{dV}{dN}$, V per tutti i punti predetti. Dunque l' equazione (3) applicata a questi soli punti di C diviene

$$\frac{4\pi}{3} r^2 \Delta^2 V_0 + \frac{dV_0}{dN} 4\pi r = -4\pi V_0 .$$

Addizionando questa equazione con la (3), e supponendo la piccola sfera ridotta al solo punto $(x_0\, y_0\, z_0)$, avremo

$$\sum \int \left(U \frac{dV}{dN} - V \frac{dU}{dN} \right) dS = \int \left(U\Delta^2 V - V\Delta^2 U \right) dq - 4\pi V_0 \qquad (4)$$

dove V_0 è il valore di V nel punto $(x_0\, , y_0\, , z_0)$. In questa equazione è contenuto il teorema di Green.

44.° Allorchè U si suppone costante, che per maggior semplicità supporremo $= 1$, il valore di V_0 è nullo, perchè U non può diventare infinito. In questa ipotesi la (4) si traduce in

$$\sum \int \frac{dV}{dN} dS = \int \Delta^2 V\, dq.$$

Ora se V è il potenziale di una massa determinata dalla superficie S, a qualunque punto di questa massa la si rapporti, il suo valore risulta $= -4\pi\rho$, dinotando ρ la densità della massa medesima nel detto punto. Quindi la precedente equazione diviene

$$\sum \int \frac{dV}{dN} dS = -4\pi \int \rho dq.$$

Ma $\int \rho dq$ è precisamente la misura di cotesta massa, che dinoteremo con M; onde avremo

$$\sum \int \frac{dV}{dN} dS = -4\pi M.$$

Dunque la *somma delle attrazioni secondo le normali ad una o più superficie* S *che avviluppano una massa* M, *eguaglia nel valore assoluto la massa medesima moltiplicata per* 4π. Se nella predetta superficie non è contenuto alcuno elemento di M, e V è il potenziale di questa massa, si ha

$$\sum \int \frac{dV}{dN} dS = 0.$$

Più generalmente se poniamo $U=\frac{1}{r}$, essendo $\Delta^2 U=0$, la (4) si traduce in

$$\sum\int\left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dN}-\frac{1}{r}\frac{dV}{dN}\right)dS+\int\frac{\Delta^2 V}{r}dq=4\pi V_0 \qquad (5).$$

È utile avvertire che questa equazione ha luogo quando U diventa infinito per un particolare valore di (x, y, z): nel caso opposto il secondo membro è nullo. Laonde se per una particolare ipotesi si ha $V=1$, risulta

$$\sum\int\frac{d\frac{1}{r}}{dN}dS=0\,,\ 4\pi\,,$$

secondo che il punto (x_0, y_0, z_0), che diremo *punto origine* di r, è posto fuori o dentro lo spazio C. Questo teorema è dovuto a Gauss.

Un altro importante teorema, che dobbiamo allo stesso Gauss, può ricavarsi dalla (2). Supponendo $U=V$, $\Delta^2 V=0$, la predetta equazione porge

$$\int\left(\frac{dV^2}{dx^2}+\frac{dV^2}{dy^2}+\frac{dV^2}{dz^2}\right)dq=\sum V\frac{dV}{dN}dS.$$

Se alle precedenti condizioni si aggiunge quest' altra, cioè che V sia costante per tutti i punti delle superficie S, sarà generalmente $\frac{dV}{dN}=0$, e quindi

$$\frac{dV^2}{dx^2}+\frac{dV^2}{dy^2}+\frac{dV^2}{dz^2}=0$$

per tutti i punti dello spazio C determinato dalle superficie S. Questa equazione non può esser vera se non che quando si ha $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{dV}{dy}=0$, $\frac{dV}{dz}=0$, ovveramente V costante per tutti i punti del predetto spazio C.

45.° Supponiamo adesso che nello spazio illimitato ed a distanza finita del punto (x_0, y_0, z_0) esista una sola superficie chiusa S: è chiaro che se V è funzione finita e continua delle coordinate dei punti del solo spazio contenuto in S, avrà luogo la prima o seconda dell'equazioni (7) secondo che il punto (x_0, y_0, z_0) è esterno od interno ad S. Ma che cosa diventano poi le predette equazioni, se V è funzione delle coordinate dei punti dello spazio illimitato posto fuori di S? Per risolvere questo problema osserviamo che lo spazio illimitato posto fuori di S può considerarsi come lo spazio contenuto fra la superficie S ed una sfera di raggio infinito che ha il suo centro in (x_0, y_0, z_0). In questa ipotesi il primo membro delle (7) diventa la differenza dei valori che prende la funzione

$$\int\left[V\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN}-\frac{1}{r}\frac{dV}{dN}\right]dS \qquad (8)$$

sulla superficie della predetta sfera, e sulla superficie S. Ma nel caso della sfera si ha $dS = r^2 d\sigma$; onde essendo

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2},$$

la funzione (8) sulla superficie della sfera di raggio infinito diventa

$$-\lim. 4\pi\left(V + r\frac{dV}{dN}\right).$$

Dinotando con T questo limite, l'equazioni (7) diventano

$$\left\{\begin{array}{l} T - \int\left[V\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dN}\right]dS + \iiint\frac{\Delta^2 V}{r}\,dx\,dy\,dz = 0,\ 4\pi V_o \\ \int\left[V\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dN}\right]dS - \iiint\frac{\Delta^2 V}{r}\,dx\,dy\,dz = 0,\ 4\pi V_o \end{array}\right.$$

secondo che V è funzione delle coordinate dello spazio illimitato posto fuori di S, ovvero delle coordinate dello spazio contenuto dentro di questa superficie.

46.° Per distinguere i valori, che prende V nello spazio interno ad S, dai valori che la stessa funzione acquista nei punti dello spazio esteriore a questa superficie, faremo uso dei simboli V_i, V_e. Similmente dinoteremo con r_i, r_e il raggio vettore r, secondo che il punto origine dello stesso è interno od esterno alla predetta superficie. Ora dinotiamo con V_i, V'_e due potenziali, che hanno uno stesso valore in ciascun punto di S, sebbene questo valore possa variare da punto a punto di cotal superficie, e che verificano l'equazioni $\Delta^2 V_i = 0$, $\Delta^2 V'_e = 0$. Essendo V'_e funzione dello spazio esterno ad S, sulla superficie della sfera di raggio infinito il suo valore sarà nullo, come pure sarà nullo il valore di $r\frac{dV'_e}{dN}$. Di fatti siegue dal detto nel n.° 1.° che le funzioni V'_e. $r\frac{dV'_e}{dN}$ sono dell'ordine $\frac{1}{r}$, e sulla sfera predetta $r = \infty$. In questa ipotesi dunque l'equazioni (9) si traducono nelle equazioni seguenti

$$\left.\begin{array}{l} \int\left[\frac{1}{r_e}\frac{dV'}{dN} - V'\frac{d\left(\frac{1}{r_e}\right)}{dN}\right]dS = 4\pi V_e'^{(o)} \\ -\int\left[\frac{1}{r_e}\frac{dV}{dN} - V\frac{d\left(\frac{1}{r_e}\right)}{dN}\right]dS = 0, \end{array}\right\} \quad (10),$$

le quali addizionate porgono

$$\int\left(\frac{dV'}{dN} - \frac{dV}{dN}\right)\frac{dS}{r_e} = 4\pi V_e'^{(o)},$$

se il punto origine è posto fuori della superficie S. Se per contrario il punto origine è posto dentro di questa superficie, le (9) si traducono in

$$\left.\begin{aligned} \int\!\!\int\left[\frac{1}{r_i}\frac{dV'}{dN} - V'\frac{d\left(\frac{1}{r_i}\right)}{dN}\right] dS = 0 \\ -\int\!\!\int\left[\frac{1}{r_i}\frac{dV}{dN} - V\frac{d\left(\frac{1}{r_i}\right)}{dN}\right] dS = 4\pi V_i^{(0)} \end{aligned}\right\} \qquad (11),$$

le quali anche mercè l'addizione porgono

$$\int\left(\frac{dV'}{dN} - \frac{dV}{dN}\right)\frac{dS}{r_i} = 4\pi V_i^{(0)}.$$

Ora supponiamo che il punto origine di r possa percorrere tutto lo spazio indefinito, nel quale è stata descritta la superficie S, rimanendo V_i funzione delle coordinate dei soli punti interni ad S, e V'_e funzione dei soli punti esterni a questa superficie: risulta evidentemente che

$$\int\left(\frac{dV'}{dN} - \frac{dV}{dN}\right)\frac{dS}{r}$$

è tal funzione delle coordinate del punto origine di r, *che pei punti interni ad* S *riesce* $=4\pi V_i$, *e pei punti esterni riesce* $=4\pi V'_e$.

47.° Nel n.° 2.° si è detto che la superficie di livello di una massa, il cui potenziale è V, è definita dall'equazione $V=$ costante; e che inoltre ogni superficie di livello è una superficie chiusa. Or supponiamo che S sia una superficie di livello di una massa M' posta dentro di S, e V'_e il potenziale di questa massa. Essendo $V'_e=$ costante in ciascun punto di S in questa ipotesi, se dinotiamo con λ questa costante, la prima delle (10) diventa

$$\int\frac{dV'}{dN}\frac{dS}{r_e} - \lambda\int\frac{d\left(\frac{1}{r_e}\right)}{dN}dS = 4\pi V'_e.$$

Ma il punto origine di r è posto fuori di S, e per conseguenza

$$\int\frac{d\left(\frac{1}{r_e}\right)}{dN}dS = 0\,;$$

ed inoltre essendo M' interna ad S si ha

$$4\pi M' = \int\frac{dV'}{dN}dS.$$

Dunque sarà

$$\frac{V'_e}{M'} = \frac{\int \frac{dV'}{dN} \frac{dS}{r_e}}{\int \frac{dV'}{dN} dS} . \qquad (12).$$

Ora supponiamo che in tutti i punti di S si siano condotte le normali, e che dalla parte interna si sia tagliato su ciascuna normale un segmento infinitesimo ε di grandezza costante: è chiaro che il luogo geometrico dell'estremità di questi segmenti è un'altra superficie chiusa S_1 contenuta in S. Se lo spazio compreso fra le due superficie S ed S_1 si suppone ripieno di materia, la cui densità in ciascun punto sia $\frac{dV'}{dN}$, cioè eguale all'attrazione che M' esercita su di S nel detto punto, si ha uno *strato di livello* secondo la denominazione introdotta da Chasles. La massa di questo strato, ed il suo potenziale rispetto al punto origine di r_e sono rispettivamente

$$\int \frac{dV'}{dN} \varepsilon dS , \qquad \int \frac{dV'}{dN} \frac{\varepsilon dS}{r_e} .$$

L'equazione (12) adunque dimostra che *il potenziale di una massa rispetto ad un punto collocato fuori di uno strato esterno di livello sta al potenziale di questo strato rispetto allo stesso punto, come la massa medesima sta alla massa dello strato.*

Se rimane inalterata la massa M' ed il punto origine di r_e, ma si costruisce un altro strato di livello su di un'altra superficie di livello S', avremo ancora

$$\frac{V'_e}{M'} = \frac{\int \frac{dV'_1}{dN'} \frac{dS'}{r'_e}}{\int \frac{dV'_1}{dN_1} dS_e} ,$$

purchè M' rimanga dentro di questo secondo strato di livello. Paragonando questa equazione con la (12) si perviene al seguente teorema: *due strati esterni di livello rispetto allo stesso punto esterno hanno i potenziali proporzionali alle loro masse.*

Dalla prima dell'equazioni (11) si ricava nella stessa ipotesi, che S sia superficie di livello,

$$\lambda \int \frac{d\left(\frac{1}{r_i}\right)}{dN} dS = \int \frac{dV'}{dN} \frac{dS}{r_i} .$$

Ma essendo in questo caso il punto origine di r_i interno ad S si ha

$$\int \frac{d\left(\frac{1}{r_i}\right)}{dN} = 4\pi ,$$

ed inoltre essendo V' costante per ciascun punto di S, il suo valore è costante anche pei punti interni. Dunque avremo

$$4\pi V'_i = \int \frac{dV'}{dN} \frac{dS}{r_i} = 4\pi\lambda ,$$

e conseguentemente

$$\frac{V'_i}{M'} = \frac{\int \frac{dV'}{dN} \frac{dS}{r_i}}{\int \frac{dV'}{dN} dS} = \frac{\lambda}{M'}. \qquad (13).$$

Quest'equazioni dimostrano che *il potenziale di uno strato di livello esterno rispetto ad un punto interno è costante*; e che *lo stesso potenziale sta alla sua propria massa come il potenziale di M' rispetto ad un punto qualunque dello strato medesimo sta ad M'.* Tutti questi teoremi sono dovuti a Chasles.

48.° Dall'equazione (12) si deduce un altro importante teorema, cioè che se *due masse M', M'' hanno una stessa superficie di livello esterna, i loro potenziali rispetto ad un punto che rimane esterno ad esse ed allo strato sono direttamente proporzionali alle masse medesime.* Imperocchè costruendo su questa superficie di livello due strati di livello, e dinotando con V'_e, V''_e i potenziali delle masse proposte, si ha

$$\frac{V'_e}{M'} = \frac{\int \frac{dV'}{dN} \frac{dS}{r_e}}{\int \frac{dV'}{dN} dS}; \qquad \frac{V''_e}{M''} = \frac{\int \frac{dV''}{dN} \frac{dS}{r_e}}{\int \frac{dV''}{dN} dS}:$$

Ma sulla comune superficie di livello si ha $V' = V''$; onde è vero il teorema.

A questa dimostrazione ci piace aggiungerne un'altra affatto indipendente dal teorema di Green. Siano M', M'' le masse di due corpi che hanno la stessa superficie di livello rispetto ad un dato punto; e V'_e, V''_e siano i loro potenziali rispetto allo stesso punto, che supporremo esterno. Essendo V'_e, V''_e funzioni delle coordinate di questo punto, sarà V''_e funzione di V'_e e reciprocamente; onde ponendo $V''_e = F(V'_e)$, avremo

$$\Delta^2 V''_e = \frac{dF}{dV'_e} \Delta^2 V'_e + \frac{d^2F}{dV'^2_e} \Delta V_e^2.$$

Ma essendo il punto, a cui si riferiscono i due potenziali, esterno rispetto alle masse ed alla comune superficie di livello, si ha $\Delta^2 V'_e = 0$, $\Delta^2 V''_e = 0$. Dunque l'equazione precedente diviene

$$\frac{d^2F}{dV'^2_e} = 0,$$

a meno che V'_e non sia costante per una qualunque posizione del punto attirato, ipotesi che escludiamo. Da questa equazione si trae

$$V''_e = AV'_e + B,$$

dinotando con A, B due costanti arbitrarie. Ora poniamo che il punto attirato possa avere una posizione qualunque nello spazio esterno alla comune superficie di livello di M' ed M'': è chiaro, che se esso si allontana all'infinito dalle due masse, essendo $V'_e = 0$, $V''_e = 0$, risulta $B = 0$. L'equazione precedente diventa perciò

$$V''_e = AV'_e, \qquad (14).$$

Inoltre questa equazione ha luogo qualunque sia la grandezza delle masse M', M''.

Ora se M' si suppone infinitesima ed M'' finita, dovendo essere V''_e quantità infinitesima e V'_e quantità finita, è mestieri che A sia direttamente proporzionale ad M''. E per contrario se si suppone M' quantità infinitesima, ed M'' quantità finita, bisogna che A sia inversamente proporzionale ad M'. Dunque potremo supporre $A = K\frac{M''}{M'}$. Ma se M' ed M'' diventano eguali ed infinitesime è d'uopo che sia $V'_e = V''_e$. Laonde $K = 1$. e la (14) si traduce in

$$V''_e = \frac{M''}{M'} V'_e \qquad (15),$$

come doveva dimostrarsi.

49.° Ma quali sono le condizioni, che deve verificare l'equazione di uno dato sistema di superficie, affinchè le stesse superficie siano *superficie di livello*? Affinchè le superficie dell'equazione

$$f(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad (16)$$

possano dirsi superficie di livello, il corrispondente potenziale V deve primieramente essere funzione del solo *parametro* λ, dovendo V rimaner costante su ciascuna delle predette superficie, e variare solamente quando si passa da una ad un'altra delle superficie medesime. Se aggiungiamo la condizione che la massa M, di cui V è il potenziale, rimane esterna rispetto allo spazio compreso fra le superficie di livello, le quali corrispondono ai valori limiti λ_0 e λ_1 del parametro λ, avremo ancora $\Delta^2 V = 0$ per tutti i valori di λ compresi fra gli stessi limiti. Ma dalla (16) risulta che λ è funzione di x, y, z; onde la equazione $\Delta^2 V = 0$ si traduce in

$$0 = \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda^2}{dx^2} + \frac{d\lambda^2}{dy^2} + \frac{d\lambda^2}{dz^2}\right) + \frac{dV}{d\lambda}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right).$$

Da questa equazione si trae

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2} : \frac{dV}{d\lambda} = -\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) : \left(\frac{d\lambda^2}{dx^2} + \frac{d\lambda^2}{dy^2} + \frac{d\lambda^2}{dz^2}\right) \qquad (17):$$

e siccome V è funzione della sola quantità λ, ne conseguita che l'equazione (16) rappresenta un sistema di superficie di livello quando λ è tale funzione di x, y, z, che verifica l'equazione

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = \left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d\lambda^2}{dy^2} + \frac{d\lambda^2}{dz^2}\right) F(\lambda) \qquad (18),$$

dinotando $F(\lambda)$ una funzione della sola λ.

Allorchè è nota questa funzione, l'equazioni (17) e (18) danno

$$d \cdot \log \frac{dV}{d\lambda} = - F(\lambda)\, d\lambda = - d\psi(\lambda);$$

onde integrando avremo

$$\log \frac{dV}{d\lambda} = \log G - \psi(\lambda),$$

dove G dinota una costante arbitraria. Passando ai numeri, moltiplicando per $d\lambda$ ed integrando novellamente con la costante arbitraria G', si ottiene

$$V = G\int e^{-\psi(\lambda)}\, d\lambda + G' \qquad (19).$$

. Ora sia λ_1 il valore di λ che corrisponde alla sfera di raggio infinito: essendo zero il corrispondente valore di V, la (19) si traduce in

$$V = G\int_{\lambda_1}^{\lambda} e^{-\psi(\lambda)}\, d\lambda \qquad (20),$$

e fa conoscere quale funzione di λ debba essere il potenziale che corrisponde alla proposta serie di superficie di livello.

50.° L'equazione (20) non basta per determinare completamente V. Quando però è data la massa, di cui V è il potenziale, possiamo ottenere G, e quindi giungere alla completa determinazione di V. Imperocchè se l è la distanza del punto attirato (x, y, z) dalla origine delle coordinate, per $l = \infty$ si ha $\lim : lV = M$, dinotando M la massa predetta. Moltiplicando dunque la (20) per l, avremo nel limite $l = \infty$

$$M = G \lim : l\int_{\lambda_1} e^{-\psi(\lambda)}\, d\lambda \qquad (21).$$

la qual' equazione porge il valore di G quando è assegnabile quello della funzione

$$\lim : l\int_{\lambda_1} e^{-\psi(\lambda)}\, d\lambda \qquad (22).$$

52.° Il sistema delle superficie

$$\frac{x^2}{A^2+\lambda} + \frac{y^2}{B^2+\lambda} + \frac{z^2}{C^2+\lambda} = h^2, \qquad (23),$$

dove λ ed h sono due quantità indipendenti da x, y, z, è un sistema di superficie di livello. Ed in vero se per brevità di scrittura si pone

$$P = \frac{x^2}{(A^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(B^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(C^2+\lambda)^2},$$

si ottiene primieramente dalla (23)

$$P\frac{d\lambda}{dx} = \frac{2x}{A^2+\lambda}\,; \quad P\frac{d\lambda}{dy} = \frac{2y}{B^2+\lambda}\,; \quad P\frac{d\lambda}{dz} = \frac{2z}{C^2+\lambda} \qquad (24),$$

la somma dei quadrati delle quali porge

$$P\left(\frac{d\lambda^2}{dx^2} + \frac{d\lambda^2}{dy^2} + \frac{d\lambda^2}{dz^2}\right) = 4 \qquad (25).$$

Moltiplicando poi le stesse equazioni (24) rispettivamente per $\frac{x}{(A^2+\lambda)^2}, \frac{y}{(B^2+\lambda)^2}, \frac{z}{(C^2+\lambda)^2}$, ed addizionando i prodotti si ha

$$P\left[\frac{x}{(A^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dx} + \frac{y}{(B^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dy} + \frac{z}{(C^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dz}\right] = 2Q \qquad (26),$$

posto per brevità

$$Q = \frac{x^2}{(A^2+\lambda)^3} + \frac{y^2}{(B^2+\lambda)^3} + \frac{z^2}{(C^2+\lambda)^3} \qquad (27).$$

Se si derivano novellamente le (24) e si addizionano i risultati, ponendo attenzione alle precedenti equazioni si ottiene agevolmente

$$P\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) + \frac{dP}{dx}\frac{d\lambda}{dx} + \frac{dP}{dy}\frac{d\lambda}{dy} + \frac{dP}{dz}\frac{d\lambda}{dz} = R$$

dove per brevità si è posto

$$R = 2\left[\frac{1}{A^2+\lambda} + \frac{1}{B^2+\lambda} + \frac{1}{C^2+\lambda}\right].$$

Ma dall'equazione (24) ricavasi

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2x}{(A^2+\lambda)^2} - 2Q\frac{d\lambda}{dx}$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{2y}{(B^2+\lambda)^2} - 2Q\frac{d\lambda}{dy}$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{2z}{(C^2+\lambda)^2} - 2Q\frac{d\lambda}{dz}.$$

Laonde avendosi

$$\frac{dP}{dx}\frac{d\lambda}{dx} + \frac{dP}{dy}\frac{d\lambda}{dy} + \frac{dP}{dz}\frac{d\lambda}{dz} = \frac{4Q}{P} - 2Q\left(\frac{d\lambda^2}{dx^2} + \frac{d\lambda^2}{dy^2} + \frac{d\lambda^2}{dz^2}\right) = -\frac{4Q}{P},$$

risulta evidentemente

$$P\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) = R.$$

Dunque

$$F(\lambda) = \left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) : \left(\frac{d\lambda^2}{dx^2} + \frac{d\lambda^2}{dy^2} + \frac{d\lambda^2}{dz^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A^2+\lambda} + \frac{1}{B^2+\lambda} + \frac{1}{C^2+\lambda}\right]$$

$$\psi = \int F(\lambda)\, d\lambda = \log\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}.$$

Da ciò si deduce che il potenziale, che corrisponde alle superficie di livello (23), verifica l'equazione

$$V = G\int_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}} \qquad (28).$$

Supponiamo adesso che vogliasi il potenziale δV di uno strato infinitamente sottile compreso fra le due superficie omotetiche

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} + \frac{z_1^2}{C^2} = h^2; \quad \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} + \frac{z_1^2}{C^2} = (h - dh)^2 \qquad (29),$$

nelle quali h è funzione di λ. Si sa che la massa di questo strato è definita dall'equazione

$$\delta M = -4\pi\rho\, ABC\, h^2\, dh;$$

e per conseguenza avremo per $l = \infty$

$$\lim : l\delta V = -4\pi\rho\, ABC\, h^2\, dh.$$

Ma quando $l = \infty$ i semiassi $h\sqrt{A^2+\lambda}$, $h\sqrt{B^2+\lambda}$, $h\sqrt{C^2+\lambda}$ della superficie di livello convergono allo stesso limite ∞. Laonde ponendo $h^2\lambda = l^2$, avremo quando l è quantità grandissima

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}} = \int \frac{2h\, dl}{l^2} = -\frac{2h}{l}$$

$$\lim : l \int_{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}} = -2h;$$

e la costante G sarà definita dall'equazione

$$G = 2\pi\rho\, ABC\, h\, dh.$$

In conseguenza la (28) diventa

$$\delta V = 2\pi\rho\, ABC\, h\, dh \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}} \qquad (30).$$

53.° Il calcolo del potenziale di una massa omogenea terminata da un'ellissoide può con questo metodo completarsi come siegue. Mutando la caratteristica δ in d, ed integrando la (30) rispetto ad h fra i limiti $h = h_0$, $h = h_1$, avremo

$$V = 2\pi\rho\, ABC \int_{h_0}^{h_1} h\, dh \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}}.$$

Se per compendio di algoritmo supponiamo

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}} = K - \psi_1(\lambda),$$

avremo evidentemente

$$2\int \Big[K - \psi_1(\lambda)\Big]\, h\, dh = Kh^2 - h^2\psi_1(\lambda) + \int h^2\, d\psi_1(\lambda),$$

poichè h è funzione di λ. Quindi se l'integrazione si estende ai limiti h_0, h_1 e si suppone che in corrispondenza λ diventi λ_0, λ_1, risulterà:

$$2\int_{h_0}^{h_1} \Big[K - \psi_1(\lambda)\Big]\, h\, dh = (h_1^2 - h_0^2)\, K - h_1^2\psi_1(\lambda_1) + h_0^2\psi_1(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} h^2\, d\psi_1(\lambda).$$

Questa equazione può tradursi anche in

$$2\int_{h_0}^{h_1} \Big[K - \psi(\lambda)\Big]\, hdh = (h_1^2 - h_0^2)\,(K - \psi(\lambda_0)) - h_1^2\,(\psi(\lambda_1) - \psi(\lambda_0)) + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} h^2\, d\psi(\lambda).$$

In seguito di questo risultato la (31) diventa

$$V = -\pi\rho\, ABC\,(h_1^2 - h_0^2)\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}}$$

$$-\pi\rho\, ABC\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left[h_1^2 - \frac{x^2}{A^2+\lambda} - \frac{y^2}{B^2+\lambda} - \frac{z^2}{C^2+\lambda}\right]\frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}}$$

Se si pone $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, risulta dalla (22) $\lambda_0 = \infty$, λ_1 radice positiva dell'equazione

$$\frac{x^2}{A^2+\lambda} + \frac{y^2}{B^2+\lambda} + \frac{z^2}{C^2+\lambda} = 1.$$

In questa ipotesi l'equazione precedente diviene

$$(31)\quad V = \pi\rho\, ABC\int_{\lambda_1}^{\infty}\left[1 - \frac{x^2}{A^2+\lambda} - \frac{y^2}{B^2+\lambda} - \frac{z^2}{C^2+\lambda}\right]\frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}}$$

e porge il potenziale di un'ellissoide piena di materia omogenea su di un punto esterno, le cui coordinate sono x, y, z.

51.° Se nella equazione (30) si pone $\lambda = 0$, si ha il potenziale di uno strato infinitamente sottile terminato da due ellissoidi omotetiche, quando il punto attirato trovasi sulla superficie che lo termina esternamente, e per tutti i punti di questa superficie il detto potenziale ha il medesimo valore. Adunque essendo la stessa superficie una *supeficie di livello*, il potenziale in discorso deve rimanere dello stesso valore, anche quando si riferisce ai punti interni dello strato, come innanzi si è detto. In altri termini l'equazione

$$\delta V = 2\pi\rho\, ABC\, h\,dh\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}}$$

porge il potenziale di uno strato infinitamente sottile compreso fra due ellissoidi omotetiche, quando il punto attirato fa parte dello stesso strato. Da ciò risulta che se si pone $\lambda_1 = 0$ nella (31), si avrà il potenziale di un'ellissoide piena di materia omogenea su di un punto che fa parte della massa medesima.

PARTE SECONDA

DELL'ATTRAZIONE DI UNA MASSA DI DENSITÀ VARIABILE TERMINATA DA UNA SUPERFICIE POCO DIFFERENTE DALLA SFERA.

CAPITOLO I.

Sviluppo in serie del valore inverso della distanza di due punti.

1.° Se nell'equazione

$$D^2 = l^2 - 2\,lr\cos\varphi + r^2$$

si pone $r = lp$. $\Delta^2 = 1 - 2\,p\cos\varphi + p^2$, come nel n.° I. della 1.ª Parte, si ha

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{l\Delta} = \frac{(1-2p\cos\varphi+p^2)^{-\frac{1}{2}}}{l}\ ;$$

e lo sviluppo di $\frac{1}{D}$ si riduce a quello di $\frac{1}{\Delta}$ o di

$$(1-2p\cos\varphi+p^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Quando p è < 1, la formola di reversione di Lagrange si applica agevolmente allo sviluppo di questa funzione, che dinoteremo per Π. Pongasi in vero $q = \cos\varphi$, e

$$\sqrt{1-2pq+p^2} = 1 - p\lambda\,, \qquad (1);$$

ed elevando a quadrato entrambi i membri di questa equazione, e poi sopprimendo termini comuni e dividendo per p, trovasi senza difficoltà

$$\lambda = q + \frac{1}{2}\,p\,(\lambda^2 - 1),$$

la quale rientra nella formola

$$\lambda = q + pf(\lambda)$$

ponendo $f(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$. Dunque essendo

$$\lambda = q + pf(q) + \frac{p^2}{2\,!}\frac{df^2(q)}{dq} + \ldots\ldots\,,$$

sarà eziandio

$$\frac{d\lambda}{dq} = 1 + p\,\frac{df(q)}{dq} + \frac{p^2}{2\,!}\frac{d^2f^2(q)}{dq^2} + \ldots\ldots \qquad (2).$$

Ma dalla (1) ricavasi

$$\frac{d\lambda}{dq} = (1 - 2\,pq + p^2)^{-\frac{1}{2}} = \Pi\ ;$$

onde ponendo per $f(q)$ il suo valore nella (2) viene

$$H = 1 + p\frac{d\,(q^2-1)}{2\cdot dq} + \frac{p^2}{2!}\frac{d^2\,(q^2-1)^2}{2^2\cdot dq^2} + \ldots\ldots$$

e quindi

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{l}\sum_0^\infty \frac{p^n}{n!}\frac{d^n}{dq^n}\left(\frac{q^2-1}{2}\right)^n.$$

Questa equazione si traduce in

$$\frac{1}{D} = \sum_0^\infty \frac{Y_n\, r^n}{l^{n+1}} \qquad (3),$$

quando a p si sostituisce il suo valore, e si pone

$$Y_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dq^n}\left(\frac{q^2-1}{2}\right)^n \qquad (4).$$

È poi evidente che Y_n è il coefficiente di h^n nello sviluppo della funzione

$$r = \left\{\frac{(g+h)^2-1}{2}\right\}^n,$$

e che per conseguenza è funzione intera di g del grado $2n$, essendo lo sviluppo di $(g^2-1)^n$ della forma

$$g^{2n} + a_1\, g^{2n-2} + \ldots\ldots + 1.$$

Allorquando r è $< l$, il valore inverso della distanza D può eziandio svilupparsi in serie. Ed in vero si ha in questo caso

$$\frac{1}{D} = \sum_0^\infty \frac{Y_n\, l^n}{r^{n+1}} \qquad (5),$$

dove Y_n è la stessa funzione che è data dalla formola (4).

2.° I punti che congiunge D sono i punti di coordinate (α, β, γ), (x, y, z). Se come nel n.° predetto si pone

$$\alpha = l \operatorname{sen}\theta \cos\varpi, \quad \beta = l \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varpi, \quad \gamma = l\cos\theta,$$

ed inoltre

$$x = r \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi', \quad y = r\operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi', \quad z = r\cos\theta',$$

si ha evidentemente

$$q = \cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varpi - \varpi') \qquad (6).$$

Ora sia $\psi = \varpi - \varpi'$, $a = \cos\theta$, $a' = \cos\theta$, $\varepsilon = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta'}e^{-i\psi}$, dinotando i la radice im-

maginaria dell'unità: e siccome da quest'equazioni ricavasi

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' e^{i\psi} = \varepsilon \operatorname{sen}^2\theta' = \varepsilon (1 - a'^2)$$

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' e^{-i\psi} = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{\varepsilon}(1 - a^2),$$

così si trova senza difficoltà

$$q = \frac{1 - a^2}{2\varepsilon} + a a' + \frac{\varepsilon}{2}(1 - a'^2) \qquad (7),$$

come risulta chiaro se la (6) si traduce in

$$q = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' e^{i\psi} + \cos\theta \cos\theta' + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' e^{-i\psi}.$$

Essendo adunque Y_n funzione di grado n rispetto a q, se si pone per q il suo valore espresso in ε sarà

$$Y_n = A_n \varepsilon^n + A_{n-1} \varepsilon^{n-1} + \dots\dots + A_{-n+1} \varepsilon^{n+1} + A_{-n} \varepsilon^{-n} \qquad (8),$$

dinotando A_n, A_{n-1}, ..., A_{-n+1}, A_{-n} funzioni razionali ed intere di a ed a'.

I coefficienti A_s contenuti nell'equazione (8) possono determinarsi mercè la seguente considerazione, che dobbiamo allo Schläfli. Eseguendo le n derivazioni successive indicate nella (4) si ottiene

$$Y_n = \frac{(2n)}{n!\, n!\, 2^n} \left[q^n + b_1 q^{n-1} + \dots\dots \right],$$

dinotando b_1, ... funzioni di n. Se questo valore di Y_n si sostituisce nella (8), ed il risultato si moltiplica per ε^n si ottiene

$$A_{-n} + A_{-n+1}\varepsilon + \dots + A_{n-1}\varepsilon^{2n-1} + A_n \varepsilon^{2n} = \frac{(2n)!}{n!\, n!\, 2^n} \left[q^n \varepsilon^n + b_1 q^{n-1} \varepsilon^n + \dots \right].$$

Questa equazione è vera qualunque sia la grandezza di ε, e per conseguenza è vera anche quando ε è quantità infinitamente piccola. Ma in tale ipotesi la (7) porge

$$\lim q\varepsilon = \frac{1 - a^2}{2};$$

onde avremo

$$A_{-n} = \frac{(2n)!}{n!\, n!\, 2^n} \left(\frac{1 - a^2}{2} \right)^n.$$

E peichè è evidente l'altra identità

$$(2n)! = \frac{d^{2n} (a'^2 - 1)^n}{da'^{2n}},$$

avremo altresì

$$A_{-n} = \frac{(-1)^n}{n!\, n!} \frac{d^{2n}}{da'^{2n}} \left(\frac{a^2 - 1}{2} \cdot \frac{a'^2 - 1}{2} \right)^n \qquad (9).$$

Dall'equazione (7) si deduce

$$q = \frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon} - \frac{(a-a'\varepsilon)^2}{2\varepsilon};$$

onde se a, a' ed ε si considerano come variabili indipendenti, si ha

$$\frac{dY_n}{da} = \frac{dY_n}{dq}\,\frac{dq}{da} = -\frac{a-a'\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\frac{dY_n}{da'} = \frac{dY_n}{dq}\,\frac{dq}{da'} = a - a'\varepsilon.$$

Da queste due equazioni si trae

$$\frac{dY_n}{da'} + \varepsilon\,\frac{dY_n}{da} = 0;$$

e quindi ponendo attenzione alla (8) avremo

$$0 = \frac{dA_{-n}}{da'}\,\varepsilon^{-n} + \left(\frac{dA_{-n+1}}{da'} + \frac{dA_{-n}}{da}\right)\varepsilon^{-n+1} + \ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{dA_n}{da'} + \frac{dA_{n-1}}{da}\right)\varepsilon^{n-1} + \frac{dA_n}{da}\,\varepsilon^{n+1}.$$

Ma conseguita dalla (7) che A_{-n} è funzione della sola a, ed A_n per contrario è funzione della sola a'. Dunque essendo $\frac{dA_{-n}}{da'} = 0$, $\frac{dA_n}{da} = 0$, la precedente equazione può esser verificata indipendentemente da ε supponendo

$$\frac{dA_{-n+1}}{da'} = -\frac{dA_{-n}}{da}; \qquad \frac{dA_{-n+2}}{da'} = -\frac{dA_{-n+1}}{da}; \ldots\ldots$$

Associando quest'equazioni alla (9) troveremo i coefficienti A_{-n+1}, A_{-n+2}, ... A_{n-1}, A_n quando sarà dato il solo coefficiente A_{-n}. Ed in vero ponendo nel secondo membro della prima delle precedenti equazioni il valore di A_{-n} tolto dalla (9) si ha

$$\frac{dA_{-n+1}}{da'} = -\frac{(-1)^n}{n!\,n!}\,\frac{d^{2n+1}}{da'^{2n}\,da}\left(\frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{a'^2-1}{2}\right)^n,$$

ovveramente

$$A_{-n+1} = -\frac{(-1)^n}{n!\,n!}\,\frac{d^{2n}}{da'^{2n-1}\,da}\left(\frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{a'^2-1}{2}\right)^n.$$

Così pure avremo

$$A_{-n+2} = \frac{(-1)^n}{n!\,n!}\,\frac{d^{2n}}{da'^{2n-2}\,da^2}\left(\frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{a'^2-1}{2}\right)^n,$$

e via discorrendo. Adunque sarà

$$Y_n = \frac{(-1)^n}{n!\,n!}\left[\varepsilon^{-n}\,\frac{d^{2n}}{da'^{2n}} - \varepsilon^{-n+1}\,\frac{d^{2n}}{da'^{2n-1}\,da} + \ldots + \varepsilon^n\,\frac{d^{2n}}{da^n}\right]\left(\frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{a'^2-1}{2}\right)^n,$$

la qual'equazione può compendiarsi in

$$Y_n = \frac{(-1)^n}{n!n!\varepsilon^n}\left(\frac{d}{da'} - \varepsilon\frac{d}{da}\right)^{2n}\left(\frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{a'^2-1}{2}\right)^n \qquad (10),$$

purchè nello sviluppo di $\left(\frac{d}{da'} - \varepsilon\frac{d}{da}\right)^{2n}$ ai coefficienti binomiali si sostituisca l'unità.

3.° Se nella equazione

$$s = \left\{\frac{(g+h)^2-1}{2}\right\}^n \qquad (11)$$

si pone $g = \cos\theta_1$, $h = i \operatorname{sen}\theta_1 e^{i\psi_1}$, si ha

$$(g+h)^2 = \cos^2\theta_1 + 2\, i \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 e^{i\psi} + i^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 e^{2i\psi_1}.$$

Da questa equazione si trae

$$(g+h)^2 - 1 = i^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 (1 + e^{2i\psi_1}) + 2\, i \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 e^{i\psi_1},$$

avvertendo che $\cos^2\theta_1 - 1 = - \operatorname{sen}^2\theta_1 = i^2 \operatorname{sen}^2\theta_1$; e quindi

$$(g+h)^2 = 2\, h\left\{\cos\theta_1 + \frac{i \operatorname{sen}\theta_1}{2}(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1})\right\}.$$

Sostituendo questo valore nella (11), e sviluppando secondo le potenze ascendenti di $e^{i\psi_1}$ ed $e^{-i\psi_1}$, si ha

$$s = h^n\left[\begin{array}{l} X_n + i\, X'_n e^{i\psi_1} - X''_n e^{2i\psi_1} + \ldots\ldots \\ \quad + i\, X'_n e^{-i\psi_1} - X''_n e^{-2i\psi_1} - \ldots\ldots \end{array}\right].$$

Ma dall'equazione $h = i \operatorname{sen}\theta_1 e^{i\psi_1}$ si deduce

$$i e^{i\psi_1} = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta_1}\,; \qquad i e^{-i\psi_1} = -\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{h};$$

onde la serie precedente si traduce in

$$s = h^n\left[X_n + X'_n\frac{h}{\operatorname{sen}\theta_1} + X''_n\frac{h^2}{\operatorname{sen}^2\theta_1} + \ldots. - X'_n\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{h} + X''_n\frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{h^2} - \ldots.\right].$$

Da un un'altra parte sviluppando la (11) secondo le potenze ascendenti di h mediante la formola di Taylor si ottiene

$$s = \sum_0^n{}_k \frac{h^k}{S^k!}\frac{d^k}{dg^k}\left(\frac{g^2-1}{2}\right)^n;$$

e però paragonando i due risultati si ha

$$X_n^{(p)} = \frac{\operatorname{sen}^p\theta_1}{(n+p)!}\frac{d^{n+p}}{dg^{n+p}}\left(\frac{g^2-1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^p \operatorname{sen}^{-p}\theta_1}{(n-p)!}\frac{d^{n-p}}{dg^{n-p}}\left(\frac{g^2-1}{2}\right)^n.$$

dalla qual' equazione si deduce quest' altra

$$\frac{d^{n-p}}{dg^{n-p}}\left(\frac{g^2-1}{2}\right)^n = \frac{(n-p)!}{(-1)^p\,(n+p)}\,\mathrm{sen}^{2p}\,\theta_1\,\frac{d^{n+p}}{dg^{n+p}}\left(\frac{g^2-1}{2}\right)^n \qquad (12).$$

Ma posto $p=0$ nella precedente equazione si ottiene

$$X_n = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dg^n}\left(\frac{g^2-1}{2}\right)^n ;$$

onde si ha pure

$$\frac{d^{n-p}}{dg^{n-p}}\left(\frac{g^2-1}{2}\right)^n = \frac{n!\,(n-p)!}{(-1)^p\,(n+p)!}\,\mathrm{sen}^{2p}\,\theta_1\,\frac{d^p X_n}{dg^p} \qquad (13).$$

In seguito di questa equazione la funzione Y_n può trasformarsi in un modo molto rimarchevole. Primamente è chiaro che al simbolo

$$\frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\left(\frac{d}{da'} - \varepsilon\,\frac{d}{da}\right)^{2n}$$

può sostituirsi lo sviluppo

$$\frac{d^n}{da^n}\,\frac{d^n}{da'^n} - \left(\varepsilon\,\frac{d^{n+1}}{da^{n+1}}\,\frac{d^{n-1}}{da'^{n-1}} + \varepsilon^{-1}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\,\frac{d^{n+1}}{da'^{n+1}}\right)$$

$$+\left(\varepsilon^2\,\frac{d^{n+2}}{da^{n+2}}\,\frac{d^{n-2}}{da'^{n-2}} + \varepsilon^{-2}\,\frac{d^{n-2}}{da^{n-2}}\,\frac{d^{n+2}}{da'^{n+2}}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

quando si omettono i coefficienti binomiali. Ma posto mente al valore di ε ed alla (12) il simbolo

$$\varepsilon^p\,\frac{d^{n+p}}{da^{n+p}}\,\frac{d^{n-p}}{da'^{n-p}} + \varepsilon^{-p}\,\frac{d^{n-p}}{da^{n-p}}\,\frac{d^{n+p}}{da'^{n+p}}$$

si trova equivalente al simbolo

$$\frac{2\,(n-p)!}{(-1)^p\,(n+p)!}\,\mathrm{sen}^p\,\theta\,\mathrm{sen}^p\,\theta'\,\cos p\psi\,\frac{d^{n+p}}{da^{n+p}}\,\frac{d^{n+p}}{da'^{n+p}}\,.$$

Laonde il simbolo

$$\frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\left(\frac{d}{da'} - \varepsilon\,\frac{d}{da}\right)^{2n}$$

può essere sostituito dall' altro simbolo

$$\frac{d^n}{da^n}\,\frac{d^n}{da'^n} + \frac{2\,(n-1)!}{(n+1)!}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\cos\psi\,\frac{d^{n+1}}{da^{n+1}}\,\frac{d^{n+1}}{da'^{n+1}}$$

$$+\frac{2\,(n-2)!}{(n+2)}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta'\,\cos 2\psi\,\frac{d^{n+2}}{da^{n+2}}\,\frac{d^{n+2}}{da'^{n+2}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

E però se si pone

$$Q_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{da^n}\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^n; \qquad Q'_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{da'^n}\left(\frac{a'^2-1}{2}\right)^n,$$

e si avverte alla (13) si trova

$$Y_n = Q_n Q'_n + 2\sum_1^n {}_p \frac{(n-p)!}{(n+p)!} \operatorname{sen}^p\theta \operatorname{sen}^p\theta' \frac{d^p Q_n}{da^p}\frac{d^p Q'_n}{da'^p}\cos p\psi \qquad (14),$$

dove ad a ed a' dopo le derivazioni bisogna sostituire $\cos\theta$, $\cos\theta'$. Questa formola fu trovata da Laplace, ma con procedimento tutto diverso dal nostro; e la funzione Y_n che essa determina è detta *coefficiente di Laplace* dell'ordine n.

4.° Allorchè si ha una funzione delle coordinate rettangole α, β, γ, che vogliamo dinotare con U, e si suppone

$$\alpha = l \operatorname{sen}\theta \cos\varpi, \qquad \beta = l \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varpi, \qquad \gamma = l\cos\theta,$$

si ha, come si è detto nel cap. I.° della 1.ª Parte,

$$l^2\Delta^2 U = l\frac{d^2 lU}{dl^2} + \frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dU}{d\nu}\right] + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2U}{d\varpi^2},$$

dove $\nu = \cos\theta$. Se U s'identifica con $\frac{1}{D}$, questa equazione non cessa di esser vera. Adottando per $\frac{1}{D}$ lo sviluppo (3) si ha

$$l\frac{d^2 lU}{dl^2} = \sum_0^\infty (n+1)\,n\,\frac{Y_n r^n}{l^{n+1}},$$

e l'equazione precedente si trasforma in

$$\sum_0^\infty \left\{\frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dY_n}{d\nu}\right] + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2Y_n}{d\varpi^2} + (n+1)\,n\,Y_n\right\}\frac{r^n}{l^{n+1}} = l^2\Delta^2U;$$

e per contrario adottando per $\frac{1}{D}$ lo sviluppo (5), la stessa equazione diventa

$$\sum_0^\infty \left\{\frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dY_n}{d\nu}\right] + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2Y_n}{d\varpi^2} + (n+1)\,n\,Y_n\right\}\frac{l^n}{r^{n+1}} = l^2\Delta^2U.$$

Ora $\frac{1}{D}$ è un integrale particolare dell'equazione

$$\Delta^2 U = 0.$$

Laonde avremo

$$\sum_0^\infty \left\{\frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dY_n}{d\nu}\right]+\frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2Y_n}{d\varpi^2}+(n+1)\,n\,Y_n\right\}\frac{r^n}{l^{n+1}}=0$$

$$\sum_0^\infty \left\{\frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dY_n}{d\nu}\right]+\frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2Y_n}{d\varpi^2}+(n+1)\,n\,Y_n\right\}\frac{l^n}{r^{n+1}}=0\,.$$

quando $U=\frac{1}{D}$, e per questa funzione si adottano gli sviluppi (3) e (5). E poichè Y_n è funzione delle solo quantità θ, ϖ, θ', ϖ', che sono affatto indipendenti da l ed r, le due precedenti equazioni dovranno esser vere indipendentemente da queste due ultime quantità. Laonde i coefficienti di Laplace verificano la seguente equazione

$$\frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dY_n}{d\nu}\right]+\frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2Y_n}{d\varpi^2}+(n+1)\,n\,Y_n=0 \qquad (15).$$

L'equazione (14) rappresenta un integrale particolare di questa equazione.

Poichè Y_n contiene θ e ϖ nello stesso modo, nel quale contiene θ' e ϖ', è chiaro che deve verificare anche l'equazione

$$\frac{d}{d\nu'}\left[(1-\nu'^2)\frac{dY_n}{d\nu'}\right]+\frac{1}{1-\nu'^2}\frac{d^2Y_n}{d\varpi'^2}+n\,(n+1)\,Y_n=0 \qquad (16),$$

dove $\nu'=\cos\theta'$. Ma non è la sola funzione Y_n che che verifica l'equazioni (15) e (16), come vedremo nel seguente capitolo.

CAPITOLO II.°

Funzioni sferiche, e loro proprietà principali.

5.° La posizione di un punto nello spazio può determinarsi non solo per mezzo delle coordinate polari r, θ', ϖ' che verificano l'equazioni

$$x=r\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\varpi'\,,\qquad y=r\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\mathrm{sen}\,\varpi'\,,\qquad z=r\cos\theta'\,,$$

ma anche mediante le coordinate polari $r\psi_1(\varphi',\varpi')$, $r\psi_2(\varphi',\varpi')$, $r\psi_3(\varphi',\varpi')$, che verificano l'eqnazioni seguenti

$$\left.\begin{array}{c} x=r\,\psi_1(\varphi',\varpi')\,,\quad y=r\,\psi_2(\varphi',\varpi')\,,\quad z=r\,\psi_3(\varphi',\varpi') \\ \psi_1^2(\varphi',\varpi')+\psi_2^2(\varphi',\varpi')+\psi_3^2(\varphi',\varpi')=1 \end{array}\right\} \qquad (1),$$

dinotando sempre r la distanza del punto dalla origine delle coordinate. Or dalle (1) ricavasi

$$\frac{x}{z}=\frac{\psi_1}{\psi_3}\,,\qquad \frac{y}{z}=\frac{\psi_2}{\psi_3}\,;$$

onde risolvendo quest'equazioni rispetto a φ' e ϖ' avremo

$$\varphi' = f_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad \varpi' = f_2\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \qquad (2).$$

Se poniamo $\varphi' =$ costante, $\varpi' =$ costante, l'equazioni (2) rappresentano due particolari superficie coniche, che hanno il vertice comune nell'origine. Dunque se nelle predette equazioni (2) φ' e ϖ' rimangono variabili, le stesse equazioni rappresentano due sistemi di superficie coniche aventi il comun vertice nell'origine delle coordinate, e per parametri rispettivamente φ' e ϖ'. Inoltre l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (3)$$

determina una superficie sferica avente il centro nell'origine quando r è costante; e quando la stessa quantità è variabile la detta equazione rappresenta un sistema di sfere concentriche. Quindi mercè le relazioni (1) alle coordinate rettangolari x, y, z vengono sostituite tre altre coordinate r, θ', ϖ, la prima delle quali dinota il parametro di un sistema di superficie sferiche concentriche, e le altre i parametri di due sistemi di superficie coniche aventi il vertice comune nel centro delle predette sfere.

Dall'equazioni (1) si trae mercè la differenziazione

$$\left.\begin{aligned} dx &= \psi_1\, dr + r\, M_1\, d\theta' + r\, N_1\, d\varpi' \\ dy &= \psi_2\, dr + r\, M_2\, d\theta' + r\, N_2\, d\varpi' \\ dz &= \psi_3\, dr + r\, M_3\, d\theta' + r\, N_3\, d\varpi' \end{aligned}\right\} \qquad (4),$$

dinotando $M_1, N_1, \ldots$ funzioni di θ', ϖ'; e quindi per reversione si ha

$$\left.\begin{aligned} dr' &= R_1\, dx + R_2\, dy + R_3\, dz \\ r\, d\theta' &= P_1\, dx + P_2\, dy + P_3\, dz \\ r\, d\varpi' &= Q_1\, dx + Q_2\, dy + Q_3\, dz \end{aligned}\right\} \qquad (5),$$

dinotando altresì $R_1, P_1, Q_1, \ldots\ldots$ funzioni delle stesse variabili θ', ϖ'. Da quest'equazioni risulta

$$\left.\begin{aligned} r\frac{d\theta'}{dx} &= P_1, & r\frac{d\theta'}{dy} &= P_2, & r\frac{d\theta'}{dr} &= P_3 \\ r\frac{d\varpi'}{dx} &= Q_1, & r\frac{d\varpi'}{dy} &= Q_2, & r\frac{d\varpi'}{dz} &= Q_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6),$$

cioè le derivate di θ' e ϖ' rispetto alle coordinate rettangole moltiplicate pel raggio vettore r sono funzioni delle sole variabili θ' e ϖ'.

6.° Dinotiamo con $F = F(\theta', \varpi')$ una qualunque funzione delle variabili θ', ϖ': derivando rispetto ad x avremo

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{d\theta'}\frac{d\theta'}{dx} + \frac{dF}{d\varpi'}\frac{d\varpi'}{dx},$$

e moltiplicando per r, e ponendo mente alle (6),

$$r\frac{dF}{dx} = P_1\frac{dF}{d\theta'} + Q_1\frac{dF}{d\varpi'} = F_1(\theta'\,\varpi').$$

Similmente si ottiene

$$r\frac{dF}{dy} = P_2\frac{dF}{d\theta'} + Q_2\frac{dF}{d\varpi'} = F_2(\theta', \varpi'),$$

$$r\frac{dF}{dz} = P_3\frac{dF}{d\theta'} + Q_3\frac{dF}{d\varpi'} = F_3(\theta', \varpi').$$

Dunque le derivate della funzione proposta rispetto ad x, y, z se si moltiplicano pel raggio vettore r diventano funzioni delle sole quantità θ' e ϖ'.

Dall'equazione

$$r\frac{dF}{dx} = F_1(\theta', \varpi'),$$

derivando novellamente rispetto ad x, si trae

$$r\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{dr}{dx}\frac{dF}{dx} = \frac{dF_1}{dx},$$

ovveramente moltiplicando per r

$$r^2\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{dr}{dx}\, r\frac{dF}{dx} = r\frac{dF_1}{dx}.$$

Ma dalla prima delle (5) si ha $\frac{dr}{dx} = R_1$, ed R_1 è funzione delle sole quantità θ' e ϖ'.

Inoltre anche

$$r\frac{dF}{dx}, \quad r\frac{dF_1}{dx}$$

sono funzioni di queste sole variabili. Dunque

$$r^2\frac{d^2F}{dx^2}$$

è funzione delle sole variabili θ', ϖ'. Lo stesso vale anche di

$$r^2\frac{d^2F}{dy^2}, \qquad r^2\frac{d^2F}{dz^2}.$$

Da tutto ciò si deduce che

$$r^2\left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}\right) = r^2\Delta^2F$$

è funzione delle sole quantità θ', ϖ', se F è funzione delle quantità medesime.

7.° Rappresenti tuttora F una funzione delle sole variabili θ', ϖ', e r^n una potenza qualunque intera o fratta, positiva o negativa di r. Si ha evidentemente

$$\frac{d}{dx}(r^n F) = nr^{n-1}\frac{dr}{dx}F + r^n\frac{dF}{dx},$$

ovvero in seguito della (3)

$$\frac{d}{dx}(r^n F) = nxr^{n-2}F + r^n\frac{dF}{dx};$$

e derivando novellamente rispetto ad x

$$\frac{d^2}{dx^2}(r^n F) = nr^{n-2}F + n(n-2)\,r^{n-4}x^2F + 2nr^{n-2}x\frac{dF}{dx} + r^n\frac{d^2F}{dx^2}.$$

Similmente si ottiene

$$\frac{d^2}{dy^2}(r^n \mathrm{F}) = nr^{n-2}\,\mathrm{F} + n\,(n-2)\,r^{n-4}\,y^2\,\mathrm{F} + 2nr^{n-2}\,y\,\frac{d\mathrm{F}}{dx} + r^n\,\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2},$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(r^n \mathrm{F}) = nr^{n-2}\,\mathrm{F} + n\,(n-2)\,r^{n-4}\,z^2\,\mathrm{F} + 2nr^{n-2}\,z\,\frac{d\mathrm{F}}{dz} + r^n\,\frac{d^2\mathrm{F}}{dz^2}.$$

Quindi addizionando questi tre risultati avremo

$$\Delta^2 (r^n \mathrm{F}) = n\,(n+1)\,r^{n-2}\,\mathrm{F} + r^n\,\Delta^2 \mathrm{F} + 2nr^{n-2}\left(x\frac{d\mathrm{F}}{dx} + y\frac{d\mathrm{F}}{dy} + z\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right) \qquad (7).$$

Ora si avverta che essendo

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = \frac{d\mathrm{F}}{d\theta'}\frac{d\theta'}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{d\varpi'}\frac{d\varpi'}{dx}$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy} = \frac{d\mathrm{F}}{d\theta'}\frac{d\theta'}{dy} + \frac{d\mathrm{F}}{d\varpi'}\frac{d\varpi'}{dy}$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dz} = \frac{d\mathrm{F}}{d\theta'}\frac{d\theta'}{dz} + \frac{d\mathrm{F}}{d\varpi'}\frac{d\varpi'}{dz},$$

il trinomio

$$x\frac{d\mathrm{F}}{dx} + y\frac{d\mathrm{F}}{dy} + z\frac{d\mathrm{F}}{dz} \qquad (8)$$

si traduce nella funzione

$$r\left(\frac{x}{r}\frac{d\theta'}{dx} + \frac{y}{r}\frac{d\theta'}{dy} + \frac{z}{r}\frac{d\theta'}{dz}\right)\frac{d\mathrm{F}}{d\theta'}$$

$$+\, r\left(\frac{x}{r}\frac{d\varpi'}{dx} + \frac{y}{r}\frac{d\varpi'}{dy} + \frac{z}{r}\frac{d\varpi'}{dz}\right)\frac{d\mathrm{F}}{d\varpi'}.$$

Ma la quantità

$$\frac{x}{r}\frac{d\theta'}{dx} + \frac{y}{r'}\frac{d\theta'}{dy} + \frac{z}{r'}\frac{d\theta'}{dz}; \qquad \frac{x}{r}\frac{d\varpi'}{dx} + \frac{y}{r'}\frac{d\varpi'}{dx} + \frac{z}{r'}\frac{d\varpi'}{dz}$$

rappresentano i coseni degli angoli, sotto i quali le sfere di raggio r tagliano i coni di parametri θ' e ϖ', e questi angoli sono retti. Dunque la funzione (8) è nulla, e la (7) si traduce in

$$\Delta^2 (r'^n \mathrm{F}) = [n\,(n+1)\,\mathrm{F} + r'^2\,\Delta^2\mathrm{F}]\,r'^{n-2} \qquad (9).$$

È bene avvertire che quando si muta n in $-n-1$, questa equazione diventa

$$\Delta^2\left(\frac{\mathrm{F}}{r'^{n+1}}\right) = \left[n\,(n+1)\,\mathrm{F} + r'^2\,\Delta^2\mathrm{F}\right]r'^{-n-3} \qquad (10),$$

e che quindi rimane invariata la funzione contenuta nelle parentisi quadre.

8.° Si dà il nome di *funzione sferica* ad una qualunque funzione delle variabili θ' e ϖ', la quale verifica l'equazione

$$r^2\,\Delta^2\,\mathrm{F} + n\,(n+1)\,\mathrm{F} = 0 \qquad (11).$$

Allorchè il sistema delle coordinate (1) s'identifica col sistema delle coordinate

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\varpi', \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\mathrm{sen}\,\varpi', \qquad z = r\cos\theta' \qquad (12),$$

la funzione F verifica l'equazione a derivate parziali, che si è trovata per Y_n nel capitolo precedente. Imperocchè dal detto nel n.° 4.° si deduce che se la funzione

U non contiene l si ha

$$l^2 \Delta U = \frac{d}{dv}\left[(1-v^2)\frac{dU}{dv}\right] + \frac{1}{1-v^2}\frac{d^2U}{d\varpi^2};$$

e però mutando U in F; l, v, ϖ in r, v', ϖ' dovrà essere

$$r^2 \Delta^2 F = \frac{d}{dv'}\left[(1-v'^2)\frac{dF}{dv'}\right] + \frac{1}{1-v'^2}\frac{d^2F}{d\varpi'^2},$$

e l'equazione (11) si traduce in

$$\frac{d}{dv'}\left[(1-v'^2)\frac{dF}{dv'}\right] + \frac{1}{1-v'^2}\frac{d^2F}{d\varpi'^2} + n(n+1)F = 0 \qquad (13),$$

che è identica con la (16) del capitolo I.° E qui vogliamo notare che quando si adotta il sistema di coordinate polari (12) il cono di parametro θ' diventa cono retto a base circolare, ed il cono di parametro ϖ' si restringe in una linea retta. Ciò si rende manifesto dal tradurre le (12) in

$$\theta' = \text{arc}\, tg\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right), \qquad \varpi' = \text{arc}\, tg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dalla data definizione della funzione sferica e dall'equazioni (9) e (10) consegnita pure che ogni funzione F delle sole variabili θ' è ϖ', la quale verifica una dell'equazioni

$$\Delta^2\left(r^n F\right) = 0, \qquad \Delta^2\left(\frac{F}{r^{n+1}}\right) = 0 \qquad (14)$$

è funzione sferica. Anzi si può aggiungere che ogni funzione F di θ' e ϖ', la quale verifica una delle (14) verifica anche l'altra. Per questa ragione suol dirsi che ogni funzione sferica dell'ordine n è anche dell'ordine $-(n+1)$,

Due equazioni della forma

$$\Delta^2(r'^n F) = 0, \qquad \Delta^2(r'^p F) = 0,$$

nelle quali F è funzione delle sole quantità θ', ϖ', diventano dunque identiche se n e p sono due esponenti che verificano l'equazione

$$n + p + 1 = 0.$$

Questo caso si presenta quando

$$n = -\frac{1}{2} + m, \quad p = -\frac{1}{2} - m,$$

dinotando m tutti i numeri della serie naturale compresi fra zero ed ∞. Quindi il sistema dell'equazioni che sono simboleggiate da $\Delta^2(r'^n F) = 0$, e per conseguenza il sistema completo delle funzioni sferiche, può ottenersi o facendo variare n da $-\frac{1}{2}$ sino a $+\infty$, ovvero facendo variare lo stesso esponente da $-\frac{1}{2}$ sino a $-\infty$. Per toglier di mezzo ogni indeterminazione su questo proposito noi supporremo in prosieguo che il numero d'ordine sia sempre > ovvero $= -\frac{1}{2}$.

9.° Siano F_n, G_p due funzioni sferiche rispettivamente degli ordini n, p, e che per conseguenza verificano l'equazioni

$$\Delta^2 (r^n F_n) = 0, \qquad \Delta^2 (r^p G_p) = 0. \qquad (15).$$

Inoltre con l'origine delle coordinate come centro, e con un raggio $= 1$ descrivasi una superficie sferica, e si supponga che in ciascun punto di questa superficie siano continue le funzioni

$$\left.\begin{array}{l} F_n, \frac{dF_n}{dx}, \frac{dF_n}{dy}, \frac{dF_n}{dz} \\ G_p, \frac{dG_p}{dx}, \frac{dG_p}{dy}, \frac{dG_p}{dz} \end{array}\right\} \qquad (16);$$

è evidente che se regge questa ipotesi le dette funzioni (16) rimarranno continue anche sulle altre sfere concentriche, tanto di raggio $>$ quanto di raggio < 1. E per verità F_n e G_p sono funzioni che dipendono soltanto da θ' e ϖ', e rimangono le stesse qualunque valore si attribuisca ad r. Siegue da ciò che le grandezze

$$\left.\begin{array}{l} r^n F_n, \frac{d}{dx}(r^n F_n), \frac{d}{dy}(r^n F_n), \frac{d}{dz}(r^n F_n) \\ r^p G_p, \frac{d}{dx}(r^p G_p), \frac{d}{dy}(r^p G_p), \frac{d}{dz}(r^p G_p) \end{array}\right\} \qquad (17)$$

sono continue in tutto lo spazio che è contenuto in una di codeste superficie sferiche. Siccome però un caso di eccezione può avvenire nel centro della sfera, noi ci limiteremo a considerare lo spazio compreso fra due sfere concentriche; e le funzioni (17) riferite ai punti di questo spazio non potranno presentare discontinuità. Or poichè le funzioni F_n e G_p verificano l'equazioni (15), è chiaro che se nella formola di Green

$$\sum\int\left(U\frac{dV}{dN} - V\frac{dU}{dN}\right)dS = \int\left(U\,\Delta^2 V - V\,\Delta^2 U\right)dq$$

dimostrata nel capitolo VIII della parte I.ª si pone

$$V = r^n F_n, \qquad U = r^p G_p,$$

risulta

$$\sum\int\left(r^p G_p \frac{d\cdot r^n F_n}{dN} - r^n F_n \frac{d\cdot r^p G_p}{dN}\right)dS = 0.$$

Qui l'integrazione deve essere estesa ai soli punti delle superficie sferiche, che limitano lo spazio; onde se dinotiamo con R_1 ed R_2 i raggi della sfera interna e della sfera esterna, rispetto alla prima di queste sfere sarà $dS = R_1^2 d\sigma$, e rispetto alla seconda sarà $dS = R_2^2 d\sigma$. Inoltre, bisogna riflettere che nella prima sfera N s'identifica con R_1, e nella sfera esterna N s'identifica con R_2. La precedente equa-

zione adunque applicata al caso attuale diventa

$$\int\left(R_2^p\, G_p \frac{d\cdot R_2^n\, F_n}{dR_2} - R_2^n\, F_n \frac{d\cdot R_2^p\, G_p}{dR_2}\right) R_2^2\, d\sigma$$

$$=\int\left(R_1^p\, G_p \frac{d\cdot R_1^n\, F_n}{dR_1} - R_1^n\, F_n \frac{d\cdot R_1^p\, G_p}{dR_1}\right) R_1^2\, d\sigma.$$

Ma essendo F_n e G_p indipendenti da R_2, R_1, si ha

$$\frac{d\cdot R_2^n\, F_n}{dR_2} = nR_2^{n-1}\, F_n; \qquad \frac{d\cdot R_2^p\, G_p}{dR_2} = p\, R_2^{p-1}\, G_p$$

$$\frac{d\cdot R_1^n\, F_n}{dR_1} = nR_1^{n-1}\, F_n; \qquad \frac{d\cdot R_1^p\, G_p}{dR_1} = p\, R_1^{p-1}\, G_p;$$

e però sostituendo nella precedente equazione avremo

$$(n-p)\,(R_2^{n+p+1} - R_1^{n+p+1})\int F_n\, G_p\, d\sigma = 0.$$

Se i numeri n e p sono diversi, risulta da questa equazione

$$\int F_n\, G_p\, d\sigma = 0 \tag{18}$$

Ora questo integrale può considerarsi come se fosse esteso ai soli punti della superficie sferica di raggio eguale all'unità; imperocchè $d\sigma$ è un elemento di codesta superficie, e θ', ϖ' sono archi di cerchi massimi computati sulla sfera predetta. Quindi possiamo affermare il seguente teorema: *se F_n e G_n dinotano due funzioni sferiche qualunque di ordine diverso, che con le loro derivate prime rispetto ad x, y, z si mantengono continue in tutti i punti della superficie di una sfera di raggio $=1$, l'integrale $\int F_n\, G_h\, d\sigma$ esteso a tutti i punti di siffatta superficie è nullo.*

10.° Allorchè la formola di Green si applica ad uno spazio contenuto in una sola superficie chiusa, e si suppone $U = \frac{1}{D}$, essendo $\Delta^2 U = 0$, si ha

$$\int\left(V\frac{d\frac{1}{D}}{dN} - \frac{1}{D}\frac{dV}{dN}\right) dS = 4\pi\, V_0 - \int \frac{\Delta^2 V}{D}\, dq;$$

e questa equazione si traduce in

$$\int\left(V\frac{d\frac{1}{D}}{dN} - \frac{1}{D}\frac{dV}{dN}\right) dS = 4\pi\, V_0 \tag{19}$$

allorchè si aggiunge anche la condizione $\Delta^2 V = 0$. Se V è una funzione sferica di grado n', le quantità

$$r^{n'}\, F_{n'}\,,\ \frac{d}{dx}\,(r^{n'}\, F_{n'}),\ \frac{d}{dy}\,(r^{n'}\, F_{n'}),\ \frac{d}{dz}\,(r^{n'}\, F_{n'})$$

restano continue in tutti i punti dello spazio contenuto nella sfera di raggio r, purchè n' sia uno qualunque dei numeri 0, 1, 2, ... ∞. In questa ipotesi dunque ha luogo l'equazione (19). Ora se nella (19) poniamo per V ed $\frac{1}{D}$ i loro valori

$$r^{n'} F_{n'}, \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{l^n Y_n}{r^{n+1}}$$

ed avvertiamo che $dS = r^2 \, d\sigma$ troveremo

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n l^n \int \left(\frac{Y_n}{r^{n+1}} \frac{d \cdot r^{n'} F_{n'}}{dr} - r^{n'} F_{n'} \frac{d}{dr} \cdot \frac{Y_n}{r^{n+1}} \right) r^2 \, d\sigma = 4\pi l^n \, F_{n'}{}^{(0)},$$

dinotando $F_{n'}{}^{(0)}$ il valore di F nel punto (α, β, γ). Questa equazione con facili riduzioni diventa

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n l^n r^{n'-n} (n' + n + 1) \int Y_n F_{n'} \, d\sigma = 4\pi \, l^{n'} F_{n'}{}^{(0)}.$$

Ma per tutti i valori di n diversi da n' si ha

$$\int Y_n F_{n'} \, d\sigma = 0 ;$$

onde risulta per $n = n'$

$$\int Y_{n'} F_{n'} \, d\sigma = \frac{4\pi \, F_{n'}{}^{(0)}}{2n' + 1} .$$

Di qui il seguente teorema: *se* n' *è un numero della serie naturale* 0, 1, 2, . . . ∞ *ed* $F_{n'}$ *una funzione sferica dell'ordine* n', *che con le sue derivate prime rispetto ad* x, y, z *si mantiene continua in tutti i punti di una superficie sferica di raggio* = 1 *si ha*

$$F_{n'} (\theta, \varpi) = \frac{2n' + 1}{4\pi} \int F_{n'} (\theta', \varpi') \, Y_{n'} \, d\sigma. \qquad (20),$$

avvertendo che nel punto (α, β, γ) *le quantità* θ' *e* ϖ' *si mutano in* θ, ϖ (vedi il capitolo prec.)

11.° Premesse queste cose, supponiamo che $F(\theta', \varpi')$ sia una funzione delle sole quantità θ', ϖ': dato che F possa svilupparsi in una serie infinita della forma

$$F (\theta', \varpi') = \sum_{0}^{\infty}{}_n F_n (\theta', \varpi') \qquad (21),$$

e che le funzioni F_n debbano essere funzioni sferiche, si domanda come dalla data funzione F possano dedursi le F_n. Sia n' uno dei valori di n; e moltiplicando la (21) per $Y_{n'} \, d\sigma$ ed integrando avremo

$$\int F (\theta', \varpi') \, Y_{n'} \, d\sigma = \sum_{0}^{\infty}{}_n \int F_n (\theta', \varpi') \, Y_{n'} \, d\sigma.$$

Allorchè l'integrazione si estende a tutti i punti della superficie sferica di raggio = 1,

della quale $d\sigma$ è un elemento, dovendo essere F_n funzione sferica, per ogni valore di n diverso da n' si ha

$$\int F_n(\theta', \varpi') Y_{n'} d\sigma = 0.$$

Quindi l'equazione precedente diviene

$$\int F(\theta', \varpi') Y_{n'} d\sigma = \int F_{n'}(\theta', \varpi') Y_{n'} d\sigma,$$

la quale in seguito della (20) si trasforma in

$$F_{n'}(\theta, \varpi) = \frac{2n'+1}{4\pi} \int F(\theta', \varpi') Y_{n'} d\sigma \qquad (22),$$

e determina la funzione $F_{n'}$.

Supponendo che sia vera l'equazione (21), mutandovi θ', ϖ' rispettivamente in θ, ϖ si

$$F(\theta, \varpi) = \sum_0^\infty {}_n F_n(\theta, \varpi),$$

equazione che in seguito della (22) diventa

$$F(\theta, \varpi) = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty {}_n (2n+1) F(\theta', \varpi') Y_n d\sigma \qquad (23).$$

Ora dimostreremo che se F è una funzione continua e finita in tutti i punti di una medesima superficie sferica, il secondo membro della (23) è sempre una serie convergente. Ponendo D invece di r_e nell'equazioni (10) del capitolo VIII della prima parte, avremo

$$\left.\begin{aligned} 4\pi V'_0 &= \int \left(\frac{1}{D} \frac{dV'}{dN} - V' \frac{d\frac{1}{D}}{dN} \right) dS \\ 0 &= \int \left(\frac{1}{D} \cdot \frac{dV}{dN} - V \frac{d\frac{1}{D}}{dN} \right) dS \end{aligned}\right\} \qquad (24).$$

Qui dinota S una superficie chiusa, e V' e V due funzioni finite e continue dei punti rispettivamente esterni ed interni ad S: inoltre il punto origine delle distanze D si suppone fuori della superficie S, ed i valori di V' e V identici nello stesso punto di questa medesima superficie. Or poichè si ha in generale

$$D^2 = l^2 - 2lr \cos\varphi + r^2;$$

se nella prima delle (24) noi riteniamo $r > l$, e per converso nella seconda $r < l$, è chiaro che dovremo nella prima delle predette equazioni supporre

$$\frac{1}{D} = \sum_0^\infty {}_n \frac{l^n Y_n}{r^{n+1}},$$

e nell'altra
$$\frac{1}{D}=\sum_0^\infty{}_n \frac{r^n Y_n}{l^{n+1}}.$$

Avremo perciò

$$4\pi V'_0=\sum_0^\infty{}_n l^n\int\left(\frac{1}{r^{n+1}}\frac{dV'}{dN}+(n+1)\frac{V'}{r^{n+2}}\right)Y_n dS. \tag{25}$$

$$0=\sum_0^\infty{}_n \frac{1}{l^{n+1}}\int\left(r^n\frac{dV}{dN}-nr^{n-1}V\right)Y_n dS. \tag{26}$$

Poniamo adesso che la superficie S sia una sfera di raggio R: primieramente è chiaro che dovendo gl'integrali (25) e (26) estendersi ai soli punti di questa superficie, potremo sostituire la costante R alla variabile r in entrambe le predette equazioni, e quindi scriverle sotto la forma

$$4\pi V'_0=\sum_0^\infty{}_n \frac{l^n}{R^n}\int\left(R\frac{dV'}{dR}+(n+1)V'\right)Y_n d\sigma \tag{27}$$

$$0=\sum_0^\infty{}_n \frac{R^{n+1}}{l^{n+1}}\int\left(R\frac{dV}{dR}-nV\right)Y_n d\sigma,$$

poichè in questa supposizione $dS=R^2 d\sigma$. Quest'ultima equazione importa che sia

$$\int R\frac{dV}{dR}Y_n d\sigma=n\int VY_n d\sigma.$$

Ma le funzioni V e V' sono eguali in tutti i punti della superficie S, e però sarà ancora

$$\int R\frac{dV'}{dR}Y_n d\sigma=n\int V' Y_n d\sigma,$$

risultato che traduce la (27) in

$$4\pi V'_0=\sum_0^\infty{}_n (2n+1)\frac{l^n}{R^n}\int V Y_n d\sigma.$$

Siccome questa equazione è vera per qualunque posizione del punto origine, così non cesserà di esser vera quando questo punto si colloca sulla sfera S. In questa ipotesi avremo $l=R$, e quindi

$$V'_0=\sum_0^\infty{}_n \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)\int V Y_n d\sigma,$$

che è appunto l'equazione (23).

12.° Possiamo ottenere un'altra dimostrazione di questo importantissimo teorema ragionando nel seguente modo. Abbiamo detto nel precedente capitolo che se α è < 1, la funzione $(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ è sviluppabile sempre in una serie convergente della forma $\sum_0^\infty{}_n \alpha^n P_n$, dinotando P_n una funzione di $\cos\varphi$. Questa funzione poi s'identifica con Y_n quando si suppone

$$\cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varpi'-\varpi).$$

Ora se l'equazione

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty{}_n \alpha^n Y_n$$

si deriva rispetto ad α, si ha

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}(\cos\varphi-\alpha) = \sum_0^\infty{}_n n\alpha^{n-1} Y_n.$$

Moltiplicando questa equazione per 2α, ed addizionando il prodotto con l'equazione precedente si ottiene

$$\frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_0^\infty{}_n (2n+1)\alpha^n Y_n. \qquad (28).$$

Il primo membro di questa equazione è nullo quando si pone $\alpha=1$, e φ non è zero; ma diventa infinito quando nello stesso tempo $\alpha=1$, $\varphi=0$. Adunque non si può dire che la serie

$$\sum_0^\infty{}_n (2n+1)\alpha^n Y_n$$

sia convergente per tutti i valori di φ quando α si pone $=1$. Ciò non pertanto moltiplichiamo l'equazione (28) per $F(\theta',\varpi')\operatorname{sen}\theta'\,d\theta'\,d\varpi'$, dinotando $F(\theta',\varpi')$ una funzione che rimane continua e finita fra i limiti $\theta'=0$, $\theta'=\pi$; $\varpi'=0$, $\varpi'=2\pi$, ovvero in tutti i punti di una superficie sferica di raggio $=1$; ed integrando fra codesti limiti troveremo

$$(1-\alpha^2)\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}\frac{F(\theta',\varpi')\,d\varpi'}{\Delta^3} = \sum_0^\infty{}_n (2n+1)\alpha^n\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}F(\theta',\varpi')Y_n\,d\varpi', \qquad (29)$$

dove per brevità di scrittura si è posto

$$\Delta = (1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

A fin di trarformare debitamente il primo membro della equazione (29) è bene avvertire che la quantità

$$\operatorname{sen}\theta'\,d\theta'\,d\varpi'$$

dinota l'elemento infinitesimo della superficie sferica di raggio $=1$. Questo ele-

mento è un piccolo rettangolo, che ha un vertice nel punto (θ', ϖ') della detta superficie, il lato $d\theta'$ sul cerchio massimo che passa per questo punto e pel punto dove la sfera è tagliata dall'asse delle z, ed il lato $\operatorname{sen}\theta' d\varpi'$ posto sul cerchio minore che passa per lo stesso punto (θ', ϖ') ed è perpendicolare al cerchio massimo predetto. È evidente che l'area di questo rettangolo può esser sostituita dalla equivalente che ha per misura $\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\psi$; ed in tal caso $d\varphi$ va computato sul cerchio massimo che passa pei punti (θ', ϖ'), (θ, ϖ), e $\operatorname{sen}\varphi\, d\psi$ sul cerchio minore che taglia ad angoli retti il precedente nel punto (θ', ϖ'). Da ciò siegue che il primo membro trasformasi in

$$(1-\alpha^2)\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \frac{F(\theta', \varpi')\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ora poniamo $\cos\varphi = 1 - 2\lambda$, e questo integrale diviene

$$2(1-\alpha^2)\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{1} \frac{F(\theta', \varpi')\, d\lambda}{[(1-\alpha)^2+4\alpha\lambda]^{\frac{3}{2}}},$$

poichè $2d\lambda = \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$, ed a $\varphi = 0, \pi$ corrisponde $\lambda = 0, 1$. Posto ciò, sia ν un numero grandissimo, e si supponga che facendo successivamente

$$\lambda = 0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots\ldots \frac{\nu}{\nu}$$

siano $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots \Delta_\nu$ i valori di $\sqrt{(1-\alpha)^2+4\alpha\lambda}$, ed $F_0, F_1, F_2, \ldots\ldots F_\nu$ quelli di $F(\theta', \varpi')$: in seguito di un conosciuto teorema il valore dell'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{F(\theta', \varpi')\, d\lambda}{[(1-\alpha)^2+4\alpha\lambda)]^{\frac{3}{2}}}$$

sarà dato dal limite verso il quale converge la somma

$$\frac{1}{2\alpha}\sum_0^{\nu}{}_n \left(\frac{1}{\Delta_n} - \frac{1}{\Delta_{n+1}}\right) F_n.$$

Ed in vero è evidente che la quantità

$$\frac{2\alpha\, d\lambda}{[(1-\alpha)^2+4\alpha\lambda]^{\frac{3}{2}}}$$

è la differenza delle frazioni

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2+4\alpha\lambda}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2+4\alpha(\lambda+d\lambda)}}$$

quando si trascurano le potenze di $d\lambda$ superiori alla prima, e che ν può sempre determinarsi in modo che la frazione $\frac{1}{\nu}$ differisce da $d\lambda$ per una quantità minore

di qualunque minimo valore assegnabile. Ora la somma

$$\sum_0^{\nu}{}_n \left(\frac{1}{\Delta_n} - \frac{1}{\Delta_{n+1}}\right) F_n$$

equivale all'altra somma

$$\frac{F_0}{\Delta_0} - \frac{F_\nu}{\Delta_{\nu+1}} + \frac{F_1 - F_0}{\Delta_1} + \frac{F_2 - F_1}{\Delta_2} + \ldots + \frac{F_\nu - F_{\nu-1}}{\Delta_\nu}.$$

Se si avverte che $\Delta_0 = 1 - \alpha$, e $\Delta_{\nu+1} = 1 + \alpha$ trascurando la frazione $\frac{1}{\nu}$ rispetto all'unità, avremo

$$\sum_0^{\nu}{}_n \left(\frac{1}{\Delta_n} - \frac{1}{\Delta_{n+1}}\right) F_n = \frac{F_0}{1-\alpha} - \frac{F_\nu}{1+\alpha} + \sum_1^{\nu} \left(\frac{F_n - F_{n-1}}{\Delta_n}\right),$$

e conseguentemente

$$2\,(1-\alpha^2) \int_0^1 \frac{F(\theta', \varpi)\, d\lambda}{[(1-\alpha)^2 + 4\alpha\lambda]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+\alpha}{\alpha} F_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} F_\nu$$

$$+ \frac{(1-\alpha^2)}{\alpha} \lim : \sum_1^{\nu} \left(\frac{F_n - F_{n-1}}{\Delta_n}\right).$$

Ma

$$\lim : \sum_1^{\nu} \left(\frac{F_n - F_{n-1}}{\Delta_n}\right)$$

non può essere una quantità infinita, poichè il numeratore di ciascuna frazione

$$\frac{F_n - F_{n-1}}{\Delta_n}$$

è quantità infinitesima ovvero dell'ordine $\frac{1}{\nu}$, ed il denominatore o è quantità finita, ovvero quantità dell'ordine $\sqrt{\nu}$, come è facile a vedersi. Se dunque questo limite si dinota per K, si ha

$$2\,(1-\alpha^2) \int_0^1 \frac{F(\theta', \varpi')\, d\lambda}{[(1-\alpha)^2 + 4\alpha\lambda]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+\alpha}{\alpha} F_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} F_\nu + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} K;$$

e per conseguenza, essendo

$$2\,(1-\alpha^2) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \frac{F(\theta', \varpi') \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 \frac{(1-\alpha^2)\, F(\theta', \varpi')\, d\lambda}{[(1-\alpha)^2 + 4\alpha\lambda]^{\frac{3}{2}}},$$

il primo membro dell'equazione (29) diviene $4\pi F_0$ quando $\alpha = 1$. Laonde per $\alpha = 1$

la predetta equazione si trasforma in

$$F_0 = \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right) \int_0^\pi \text{sen}\,\theta'\,d\theta' \int_0^{2\pi} F(\theta', \varpi')\,Y_n\,d\varpi'.$$

Ma F_0 è un valore particolare della funzione $f(\theta', \varpi')$ sulla sfera di raggio $= 1$, e l'integrale doppio

$$\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right) \int_0^\pi \text{sen}\,\theta'\,d\theta' \int_0^{2\pi} F(\theta', \varpi')\,Y_n\,d\varpi'$$

è it valore che la funzione sferica $F_n(\theta', \varpi')$ acquista nello stesso punto. Dunque è vero il proposto teorema.

13.° Da quanto sinora si è detto risulta che *ogni funzione* $F(\theta, \varpi)$, *la quale rimane finita* e *continua in ciascun punto di una superficie sferica di raggio* = 1, *è sempre sviluppabile in una serie infinita di funzioni sferiche*. Ma può ancora dimostrarsi che la predetta funzione non ammette che un solo sviluppo in serie infinita di funzioni sferiche. Imperocchè supponiamo per poco che possa aversi simultaneamente

$$F(\theta, \varpi) = \sum_0^\infty {}_n F_n(\theta, \varpi)\,; \qquad F(\theta, \varpi) = \sum_0^\infty {}_n G_n(\theta, \varpi),$$

dinotando $G_n(\theta, \varpi)$ una funzione sferica, diversa da $F_n(\theta, \varpi)$: è chiaro che in seguito della (22) sarà

$$F_n(\theta, \varpi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int F(\theta', \varpi')\,Y_n\,d\sigma = G_n(\theta, \varpi),$$

vale a dire che ciascun termine della serie

$$\sum_0^\infty {}_n F_n(\theta, \varpi)$$

sarà identicamente il termine corrispondente della serio

$$\sum_0^\infty {}_n G_n(\theta, \varpi),$$

cioè che saranno identici i due sviluppi.

CAPITOLO III.°

Potenziale di uno strato sferico di densità variabile.

14.° Il potenziale V di uno strato sferico di densità ρ, la quale varia da punto a punto dello strato medesimo, è dato dalla equazione

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{4\pi} \frac{\rho r^2\,dr\,d\sigma}{\sqrt{l^2 - 2lr\cos\gamma + r^2}}$$

com'è noto da quanto si è detto nella I.° Parte, dinotando l la distanza del punto

attirato dal centro comune delle due sfere che limitano lo strato, r la distanza di un punto qualunque dello stesso strato dal centro, e γ l'angolo che r comprende con l. Sia $\rho = F(r, \theta', \varpi')$, e dinoti F una funzione che rimane finita e continua fra i limiti delle integrazioni indicate nel secondo membro dell'equazione (1). Allorchè l è $> R_2$, ovvero del raggio della sfera più grande che limita lo strato proposto, si ha

$$(l^2 - 2lr\cos\gamma + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty {}_n \frac{r^n Y_n}{l^{n+1}};$$

e sostituendo questo valore nella (1) risulta

$$V = \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{l^{n+1}} \int_{R_1}^{R_2} r^{n+2}\, dr \int_0^{4\pi} F(r, \theta', \varpi')\, Y_n\, d\sigma \qquad (2).$$

Come si è dimostrato nel capitolo primo di questa seconda Parte, il valore di Y_n si ha dalla equazione

$$Y_n = 2 \sum_0^n {}_\nu (-)^\nu X_n^{(\nu)} P_n^{(\nu)} \cos\nu(\varpi' - \varpi),$$

dinotando $X_n^{(\nu)}$ una funzione razionale ed intera di $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, e $P_n^{(\nu)}$ un'analoga funzione di $\cos\theta'$ e $\operatorname{sen}\theta'$. Sviluppando $\cos\nu(\varpi' - \varpi)$, e ponendo per brevità

$$C_n = X_n^{(\nu)} \cos\nu\varpi, \qquad S_n^{(\nu)} = X_n^{(\nu)} \operatorname{sen}\nu\varpi$$

$$C'_n = P_n^{(\nu)} \cos\nu\varpi', \qquad S'^{(\nu)}_n = P_n^{(\nu)} \operatorname{sen}\nu\varpi',$$

troveremo
$$Y_n = 2 \sum_0^n (-)^\nu \left(C_n^{(\nu)} C'^{(\nu)}_n + S_n^{(\nu)} S'^{(\nu)}_n \right).$$

È utile notare che il coefficiente 2, che affetta tutto il secondo membro, deve esser sostituito dall'unità quando $\nu = 0$.

Poichè $F(r, \theta', \varpi')$ è una funzione finita e continua di queste variabili, ed r, θ', ϖ' sono variabili indipendenti, è chiaro che per ogni determinato valore di r compreso fra i limiti R_1 ed R_2 si ha un valore della predetta funzione, il quale può riguardarsi come funzione di θ' e ϖ' che rimane continua e finita in tutti i punti della sfera di raggio $= 1$. Dinotando dunque con r_1 un determinato valore di r compreso fra i detti limiti, avremo in seguito del n.° 12.° del precedente capitolo

$$F(r_1, \theta', \varpi') = \sum_0^\infty {}_{n'} F_{n'}(r_1, \theta', \varpi'),$$

dove F_n' è il simbolo di una funzione sferica. Siccome questo risultato ha luogo

qualunque sia il valore di r_1, ne conseguita che potremo ancora stabilire l'eguaglianza

$$F(r, \theta', \varpi') = \sum_0^{\infty}{}_{n'} F_{n'}(r, \theta', \varpi').$$

Sostituendo nella (2), ed avvertendo che

$$\int F_{n'}(r, \theta', \varpi') Y_n \, d\sigma = 0$$

quando n ed n' sono numeri diversi avremo

$$V = \sum_0^{\infty}{}_n \frac{1}{l^{n+1}} \int_{R_1}^{R_2} r^{n+2} dr \int_0^{4\pi} F_n(r, \theta', \varpi') Y_n \, d\sigma \qquad (4).$$

Ora conseguita dal n.° 10.° del capitolo precedente che

$$F_n(r, \theta', \varpi') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{4\pi} F(r, \lambda, \vartheta) Y'_n \, d\sigma \qquad (5),$$

dinotando Y'_n una funzione che si compone di θ', ϖ', λ, ϑ nello stesso modo che Y_n si compone di θ, ϖ, θ', ϖ'. Se dinotiamo con $D_n^{(\nu)}$, $T_n^{(\nu)}$ ciò che diventano $C_n^{(\nu)}$, $S_n^{(\nu)}$ quando a θ e ϖ si sostituiscono rispettivamente le variabili λ e ϑ, avremo analogamente alla (3)

$$Y_n = 2 \sum_0^n{}_p (-)^p (D_n^{(p)} C'^{(p)}_n + T_n^{(p)} S'^{(p)}_n);$$

onde sostituendo nella (5) e ponendo per brevità

$$\left.\begin{aligned} A_n^{(p)} &= \int_0^{4\pi} F(r, \lambda, \vartheta) D_n^{(p)} \, d\sigma \\ B_n^{(p)} &= \int_0^{4\pi} F(r, \lambda, \vartheta) T_n^{(p)} \, d\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (6),$$

troveremo

$$F_n(r, \theta', \varpi') = 2\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right) \sum_0^n{}_p \left((-)^p (A_n^{(p)} C'^{(p)}_n + B_n^{(p)} S'^{(p)}_n\right).$$

Moltiplicando questa eguagliaza per la (3) otterremo quattro specie di termini, che possono rappresentarsi rispettivamente per

$$Q_0 C_n^{(\nu)} C'^{(\nu)}_n C'^{(p)}_n; \qquad Q_1 S_n^{(\nu)} S'^{(\nu)}_n S'^{(p)}_n \qquad (7)$$

$$Q_2 C_n^{(\nu)} C'^{(\nu)}_n S'^{(p)}_n; \qquad Q_3 S_n^{(\nu)} S'^{(\nu)}_n C'^{(p)}_n \qquad (8).$$

I termini della forma (8) moltiplicati per $d\sigma$ ed integrati fra i limiti 0 e 4π danno

per risultato zero. Di fatti essendo

$$C'^{(\nu)}_n S'^{(p)}_n = P^{(\nu)}_n P^{(p)}_n \cos\nu\varpi' \operatorname{sen} p\varpi'$$
$$S'^{(\nu)}_n C'^{(p)}_n = P^{(\nu)}_n P^{(p)}_n \operatorname{sen}\nu\varpi' \cos p\varpi'$$
$$d\sigma = \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, d\varpi'$$

sarà evidentemente

$$\int_0^{4\pi} C'^{(\nu)}_n S'^{(p)}_n\, d\sigma = \int_0^{\pi} P^{(\nu)}_n P^{(p)}_n \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \cos\nu\varpi' \operatorname{sen} p\varpi'\, d\varpi' = 0$$
$$\int_0^{4\pi} S'^{(\nu)}_n C'^{(p)}_n\, d\sigma = \int_0^{\pi} P^{(\nu)}_n P^{(p)}_n \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\nu\varpi' \cos p\varpi'\, d\varpi' = 0.$$

Anche i termini della forma (7) moltiplicati per $d\sigma$, ed integrati fra i predetti limiti, generalmente parlando, porgono per risultato zero. Questo però non accade quando $p = \nu$, poichè si ha

$$\int_0^{4\pi} C'^{(\nu)2}_n\, d\sigma = \int_0^{\pi} P^{(\nu)2}_n \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \cos^2\nu\varpi'\, d\varpi' = \pi \int_0^{\pi} P^{(\nu)2}_n \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'$$
$$\int_0^{4\pi} S'^{(\nu)2}_n\, d\sigma = \int_0^{\pi} P^{(\nu)2}_n \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\nu\varpi'\, d\varpi' = \pi \int_0^{\pi} P^{(\nu)2}_n \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'.$$

Da ciò si rende manifesto che, ponendo $b^{(\nu)}_n = \int_0^{\pi} P^{(\nu)2}_n \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'$, viene

$$\int_0^{4\pi} F_n(r, \theta', \varpi')\, d\sigma = (2n+1) \sum_0^n{}_\nu\, b^{(\nu)}_n \left(A^{(\nu)}_n C^{(\nu)}_n + B^{(\nu)}_n S^{(\nu)}_n\right),$$

avvertendo che $b^{(0)}_n$ deve essere sostituita da $\frac{b^{(0)}_n}{4}$; e per conseguenza potendosi supporre

$$V = \sum_0^\infty{}_n Z_n \qquad (9),$$

troveremo

$$Z_n = \frac{2n+1}{l^{n+1}} \sum_0^n{}_\nu\, b^{(\nu)}_n \left(C^{(\nu)}_n \int_{R_1}^{R_2} A^{(\nu)}_n r^{n+2}\, dr + S^{(\nu)}_n \int_{R_1}^{R_2} B^{(\nu)}_n r^{n+2}\, dr\right) \qquad (10),$$

poichè $A^{(\nu)}_n$, $B^{(\nu)}_n$ sono funzioni di r.

15.° Allorchè l è $< R_1$, ovvero allorchè il punto attirato è posto dentro il vano che racchiude la sfera di raggio R_1, si ha

$$(l^2 - 2lr\cos\gamma + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty{}_n \frac{l^n Y_n}{r^{n+1}},$$

e la (1) si trasforma in

$$V = \sum_0^\infty l^n \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^{n-1}} \int_0^{4\pi} F(r, \theta', \varpi')\, d\sigma.$$

Il valore dell'integrale $\int_0^{4\pi} \mathrm{F}(r, \theta', \varpi')\, d\sigma$

è quello stesso che abbiamo trovato nel numero precedente. Quindi se si pone

$$\mathrm{V} = \sum_0^{\infty}{}_n \mathrm{Z}'_n \qquad (\mathrm{t}1),$$

avremo nella presente ipotesi

$$\mathrm{Z}'_n = (2n+1)\, l^n \sum_0^n{}_\nu\, b_n^{(\nu)} \left(\mathrm{C}_n^{(\nu)} \int_{\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2} \mathrm{A}_n^{(\nu)} \frac{dr}{r^{n-1}} + \mathrm{S}_n^{(\nu)} \int_{\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2} \mathrm{B}_n^{(\nu)} \frac{dr}{r^{n-1}} \right) \qquad (12).$$

Da ultimo se $\mathrm{R}_1 < l < \mathrm{R}_2$, l'equazione (t) può tradursi evidentemente in

$$\mathrm{V} = \int_{\mathrm{R}_1}^{l} \int_0^{4\pi} \frac{\rho r^2\, dr\, d\sigma}{\sqrt{l^2 - 2lr\cos\gamma + r^2}} + \int_l^{\mathrm{R}_2} \int_0^{4\pi} \frac{\rho r^2\, dr\, d\sigma}{\sqrt{l^2 - 2lr\cos\gamma + r^2}}\,;$$

e però ponendo

$$\mathrm{V} = \sum_0^{\infty} \mathrm{Z}''_n \qquad (\mathrm{t}3),$$

troveremo senza difficoltà

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Z}''_n = \frac{(2n+1)}{l^{n+1}} \sum_0^n{}_\nu\, b_n^{(\nu)} \left(\mathrm{C}_n^{(\nu)} \int_{\mathrm{R}_1}^{l} \mathrm{A}_n^{(\nu)} r^{n+2}\, dr + \mathrm{S}_n^{(\nu)} \int_{\mathrm{R}_1}^{l} \mathrm{B}_n^{(\nu)} r^{n+2}\, dr \right) \\ + (2n+1)\, l^n \sum_0^n{}_\nu\, b_n^{(\nu)} \left(\mathrm{C}_n^{(\nu)} \int_l^{\mathrm{R}_2} \mathrm{A}^{(\nu)} \frac{dr}{r^{n-1}} + \mathrm{S}_n^{(\nu)} \int_l^{\mathrm{R}_2} \mathrm{B}_n^{(\nu)} \frac{dr}{r^{n-1}} \right) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{t}4).$$

Quindi, comunque sia collocato il punto attirato rispetto ad uno strato sferico di variabile densità, il potenziale dello strato medesimo rispetto a quel punto in ogni caso si determina per mezzo delle funzioni sferiche.

16.° A compiere la soluzione del presente problema non ci rimane che determinare $b_n^{(\nu)}$. Se rammentiamo che

$$\mathrm{P}_n^{(\nu)} = \pm \frac{(n-r)!}{(2n)!} (1 - x'^2)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^{n+\nu}(x'^2 - 1)^n}{dx'^{n+\nu}}$$

quando per compendio di algoritmo si pone $x' = \cos\theta'$, avremo

$$\overline{\mathrm{P}_n^{(\nu)}}^2 = \left[\frac{(n-\nu)!}{(2n)!}\right]^2 (1 - x'^2)^\nu \left[\frac{d^{n+\nu}(x'^2 - 1)^n}{dx'^{n+\nu}}\right]^2$$

Ma nel capitolo I.° si è trovato

$$(x'^2 - 1)^\nu \frac{d^{n+\nu}(x'^2 - 1)^n}{dx'^{n+\nu}} = \frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!} \frac{d^{n-\nu}(x'^2 - 1)^n}{dx'^{n-\nu}}\,,$$

onde avremo pure

$$\overline{P_n^{(\nu)}}^2 = \pm \frac{(n-\nu)!\,(n+\nu)!}{[(2n)!]^2} \frac{d^{n+\nu}(x'^2-1)^n}{dx'^{n+\nu}} \frac{d^{n-\nu}(x'^2-1)^n}{dx'^{n-\nu}}.$$

Nel secondo membro di questa equazione vale il segno superiore se ν è numero pari, ed il segno inferiore se ν è impari. Ponendo dunque attenzione che

$$\int_0^\pi \overline{P_n^{(\nu)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = \int_{-1}^1 \overline{P_n^{(\nu)}}^2\, dx',$$

dall'equazione precedente si deduce

$$\int_0^\pi \overline{P_n^{(\nu)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = \pm \frac{(n-\nu)!\,(n+\nu)!}{[(2n)!]^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+\nu}(x'^2-1)^n}{dx'^{n+\nu}} \frac{d^{n-\nu}(x'^2-1)^n}{dx'^{n-\nu}}\, dx',$$

e conseguentemente

$$\int_0^\pi \overline{P_n^{(\nu-1)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = \mp \frac{(n-\nu+1)!\,(n+\nu-1)!}{[(2n)!]^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+\nu-1}(x'^2-1)^n}{dx'^{n+\nu-1}} \frac{d^{n-\nu+1}(x'^2-1)^n}{dx'^{n-\nu+1}}\, dx'.$$

Ma integrando per parti si ha pure

$$\int_{-1}^1 \frac{d^{n+\nu}(x'^2-1)^n}{dx'^{n+\nu}} \frac{d^{n-\nu}(x'^2-1)^n}{dx'^{n-\nu}}\, dx' = -\int_{-1}^1 \frac{d^{n+\nu-1}(x'^2-1)^n}{dx'^{n+\nu-1}} \frac{d^{n-\nu+1}(x'^2-1)^n}{dx'^{n-\nu+1}}\, dx'.$$

Laonde sarà

$$\int_0^\pi \overline{P_n^{(\nu)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = \frac{n+\nu}{n-\nu+1} \int_0^\pi \overline{P_n^{(\nu-1)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'.$$

Da questa equazione possiamo conchiudere che sia

$$\int_0^\pi \overline{P_n^{(\nu)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)\ldots\ldots(n+1)}{(n-\nu+1)(n-\nu+2)\ldots\ldots n} \int_0^\pi \overline{P_n^{(0)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta',$$

ovveramente

$$\int_0^\pi \overline{P_n^{(\nu)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = \frac{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}{[(n)!]^2} \int_0^\pi \overline{P_n^{(0)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \qquad (15).$$

Ora nell'equazione

$$\left(1 - 2\alpha\cos\theta' + \alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty{}_n\, \alpha^n P_n^{(0)}$$

si ponga successivamente $\alpha = lr$, $\alpha = \frac{r}{l}$, ed avremo

$$\left(1 - 2lr\cos\theta' + l^2r^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty{}_n\, l^n r^n P_n^{(0)},$$

$$\left(1 - 2\frac{r}{l}\cos\theta' + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty{}_{n'}\, \frac{r^{n'}}{l^{n'}} P_{n'}^{(0)}.$$

Da quest' equazioni si trae

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta'\, d\theta'}{\sqrt{1-2lr\cos\theta'+l^2r^2}\sqrt{1-2\frac{r}{l}\cos\theta'+\frac{r^2}{l^2}}} = \sum_0^\infty{}_n\, r^{2n}\int_0^\pi \overline{P_n^{(0)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \quad (16),$$

poichè si è trovato più innanzi

$$\int_0^\pi P_n^{(0)} P_{n'} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = 0.$$

Essendo il secondo membro dell'equazione (16) indipendente da l, la predetta equazione deve aver luogo qualunque sia il valore di questa quantità, e quindi anche quando $l=1$. In tale ipotesi il primo membro dell'equazione medesima si traduce in

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta'\, d\theta'}{1-2r\cos\theta'+r^2} = \frac{1}{r}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 2\sum_0^\infty{}_n \frac{r^{2n}}{2n+1},$$

potendosi supporre $r<1$. Sostituendo questo valore nella (16), ed eguagliando i coefficienti delle eguali potenze di r in entrambi i membri dell'equazione risultante avremo

$$\int_0^\pi \overline{P_n^{(0)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = \frac{2}{2n+1};$$

e ponendo questo valore nella (16) si ottiene

$$\int_0^\pi \overline{P_n^{(\nu)}}^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n-\nu)!\,(n-\nu)!}{[(n)!]^2},$$

che è il cercato valore di $b_n^{(\nu)}$.

17.° Allorchè la densità è funzione della sola variabile r, l'equazione (14), di cui son casi particolari la (10) e la (12) si semplificano di molto. Ed in vero si ha in tale ipotesi

$$V = \sum_0^\infty{}_n \left[\frac{1}{l^{n+1}}\int_{R_1}^{l} \rho r^{n+2} dr + l^n \int_l^{R_2} \rho \frac{dr}{r^{n-1}}\right]\int_0^{4\pi} Y_n\, d\sigma$$

Ora si ha $\int_0^{4\pi} Y_n\, d\sigma = 4\pi$ quando $n=0$, e quando n è diversa da zero si ha $\int_0^{4\pi} Y_n\, d\sigma = 0$. Dunque avvertendo che $\frac{dr}{r^{n-1}}$ può essere sostituito da $\frac{r\,dr}{r^n}$, sarà

$$V = \frac{4\pi}{l}\int_{R_1}^{l} \rho r^2\, dr + 4\pi\int_l^{R_2} \rho r\, dr \qquad (17).$$

Questa equazione poi diventa

$$V_e = \frac{4\pi}{l}\int_{R_1}^{R_2} \rho r^2\, dr; \qquad V_i = 4\pi\int_{R_1}^{R_2} \rho r\, dr \qquad (18)$$

secondo che il punto attirato è posto fuori dello strato sferico proposto, ovvero

nel vano della sfera che lo limita internamente. Se poi ρ si suppone costante, l'equazioni (17) e (18) si mutano in

$$V = 2\pi\rho\left[R_2^2 - \frac{2l^2}{3} - \frac{4R_1^3}{3l}\right] \qquad (19),$$

$$V_e = \frac{4\pi\rho}{3}(R_2^3 - R_1^3); \qquad V_i = 2\pi(R_2^2 - R_1^2) \qquad (20),$$

Questi risultati sono identici a quelli trovati nella prima parte della presente Memoria

18.° Nella prima parte di questa Memoria abbiamo anche dimostrato come un integrale che si rapporta a tutti i punti di una data massa possa convertirsi in un altro integrale che si estende ai soli punti delle superficie che limitano la massa medesima. Ora vogliamo far vedere come possa ottenersi il potenziale di un punto posto fuori di uno strato sferico di densità variabile, o posto nel vano della superficie che limita internamente lo strato, quando a sua volta si conosce il potenziale di tutti i punti della superficie esterna o della superficie interna dello strato medesimo.

Imperocchè se il punto non fa parte della massa attraente, il potenziale V verifica l'equazione

$$l\frac{d^2lV}{dl^2} + \frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dV}{d\nu}\right] + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{d^2V}{d\varpi^2} = 0,$$

come è stato dimostrato nel I.° capitolo della I.ª Parte; onde se si avverte che, essendo $\nu = \cos\theta$, si ha

$$\frac{d}{d\nu} = \frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{d\nu} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta},$$

l'equazione precedente diviene

$$l\frac{d^2lV}{dl^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dV}{d\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2V}{d\varpi^2} = 0 \qquad (21),$$

Ora sia $V = \sum_0^\infty {}_n Z_n$, e sostituendo per V questo valore nella (21) risulta

$$\sum_0^\infty {}_n\left\{l\frac{d^2\cdot lZ_n}{dl^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dZ_n}{d\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2Z_n}{d\varpi^2}\right\} = 0,$$

alla quale si soddisfa quando si pone

$$l\frac{d^2\cdot lZ_n}{dl^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dZ_n}{d\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2Z_n}{d\varpi^2} = 0 \qquad (22),$$

se si vuole le Z di diverso indice siano indipendenti fra loro, e nello stesso tempo unzioni non del tutto arbitrarie di l, θ, e ϖ.

Premesse queste cose supponiamo primieramente che quando $l=R_2$, cioè quando il punto attirato coincide con un punto qualunque della sfera esterna che limita la massa attraente, abbiasi $V=f(\theta, \varpi)$. Poichè in questa ipotesi si ha

$$f(\theta, \varpi)=\sum_0^\infty {}_n f_n(\theta, \varpi),$$

dinotando f_n il simbolo delle funzioni sferiche; così, quando $l=R_2$, la funzione Z_n s'identifica con $f_n(\theta, \varpi)$, cioè diventa una funzione sferica dell'ordine n. Se dunque si dinota con $Z_n^{(0)}$ questo valore speciale di Z_n, avvertendo alla (18) del capitolo precedente, dobbiamo avere

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dZ_n^{(0)}}{d\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2Z_n^{(0}}{d\varpi^2}+n(n+1)Z_n^{(0)}=0.$$

Ma se $Z_n^{(0)}$ è funzione sferica, ciò dipende perchè in un particolar modo contiene θ e ϖ; e quando ad R_2 si sostituisce l in questa funzione, cioè quando essa ridiventa Z_n, niente si cangia rispetto all'indole di questa funzione in quanto al modo di contenere i predetti argomenti θ e ϖ. Dunque sarà in generale

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dZ_n}{d\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2Z_n}{d\varpi^2}+n(n+1)Z_n=0.$$

In seguito di questa equazione la (22) diventa

$$l\frac{d^2\cdot lZ_n}{dl^2}-n(n+1)Z_n=0,$$

la quale è verificata supponendo

$$Z_n=l^nH+\frac{K}{l^{n+1}} \qquad (23),$$

e dinotando H, K due funzioni di θ e ϖ. Essendo il punto attirato esterno alla sfera di raggio R_2, siccomo per $l=\infty$ deve risultare $V=0$, così deve anche risultare $Z_n=0$. È dunque mestieri che sia $H=0$, e conseguentemente in questa ipotesi si ha

$$Z_n=\frac{K}{l^{n+1}}.$$

Ma quando $l=R_2$ deve aversi $Z_n^{(0)}=f_n(\theta, \varpi)$, e la precedente equazione diviene

$$Z_n^{(0)}=\frac{K}{R_2^{n+1}}.$$

Laonde risulta $K=R_2^{n+1}f_n(\theta, \varpi)$, e per conseguenza

$$Z_n=\left(\frac{R_2}{l}\right)^{n+1}f_n(\theta, \varpi).$$

Ponendo per $f_n(\theta, \varpi)$ il suo valore, che ricavasi dalla equazione (22) del capitolo precedente, viene

$$Z_n = \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)\left(\frac{R_2}{l}\right)^{n+1} \int_0^{4\pi} f(\theta', \varpi')\, Y_n\, d\sigma,$$

dove Y_n è il coefficiente del termine α^n nello sviluppo di $(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ quando α è < 1, e

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varpi' - \varpi).$$

Ora se α s'identifica con $\frac{R_2}{l}$, si ha

$$Z_n = \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)\alpha^{n+1} \int_0^{4\pi} f(\theta', \varpi')\, Y_n\, d\sigma,$$

e quindi il valore di V sarà dato dalla seguente equazione

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[f(\theta', \varpi') \sum_0^{\infty}{}_n (2n+1)\,\alpha^{n+1}\, Y_n\right] d\sigma,$$

la qual'equazione mercè la (28) del precedente capitolo diventa

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \frac{\alpha\,(1-\alpha^2)\, f(\theta', \varpi')\, d\sigma}{(1 - 2\alpha\cos\lambda + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Finalmente ponendo per α il suo valore $\frac{R_2}{l}$, si trova pel potenziale richiesto

$$V = \frac{R_2(l^2 - R_2{}^2)}{4\pi}\int_0^{4\pi} \frac{f(\theta', \varpi')\, d\sigma}{(l^2 - 2lR_2\cos\gamma + R_2{}^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (24).$$

Supponiamo ora che il punto attirato si trovi nel vano della sfera di raggio $= R_1$, che limita internamente lo strato; e che sia $V = f(\theta, \varpi)$ quando $l = R_1$: ragionando come si è fatto precedentemente e supponendo che sia $V = \sum_0^{\infty}{}_n Z_n$, troveremo la stessa equazione (23) per determinare Z_n. Ma in questa ipotesi nel caso di $l = 0$ deve risultare $V = 0$, e quindi $Z_n = 0$; ondo è mestieri che sia $K = 0$, e quindi

$$Z_n = Hl^n.$$

Posto $l = R_1$ in questa equazione deve risultare

$$Z_n{}^{(o)} = HR_1{}^n = f_n(\theta, \varpi),$$

e però avremo

$$Z_n = \left(\frac{l}{R_1}\right)^n f_n(\theta, \varpi).$$

In seguito dell'equazione (22) del capitolo precedente questa espressione di Z_n si trasforma in

$$Z_n = \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)\left(\frac{l}{R_1}\right)^n \int_0^{4\pi} f(\theta, \varpi)\, Y_n\, d\sigma\,;$$

e quindi posto $\alpha = \frac{l}{R_1}$ risulta

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[f(\theta, \varpi)\sum_0^{\infty}{}_n (2n+1)\,\alpha^n\, Y_n\right] d\sigma\,,$$

ovveramente

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\frac{(1-\alpha)\,f(\theta, \varpi)\,d\sigma}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_1\,(R_1^2-l^2)}{4\pi}\int_0^{4\pi}\frac{f(\theta', \varpi')\,d\sigma}{(l^2-2lR_1\cos\gamma+R'^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

CAPITOLO IV.°

Attrazione di uno sferoide poco differente dalla sfera.

19.° Se il punto (α, β, γ) è posto fuori dello sferoide, essendo $l > r$, si ha

$$\frac{1}{D} = \sum_0^{\infty}{}_n \frac{r^n Y_n}{l^{n+1}}\,;$$

onde se lo sferoide è pieno, e si dinota con V_e il suo potenziale, risulta

$$V_e = \sum_0^{\infty}{}_n \frac{1}{l^{n+1}}\int_0^{r_0}\int_0^{4\pi} \rho r^{n+2}\, Y_n\, dr\, d\sigma \qquad (1).$$

Dinoti a_0 il raggio di una sfera inscritta alla superficie del proposto sferoide, e sia

$$r_0 = a_0\,(1+\varepsilon_0) \qquad (2)$$

l'equazione di questa superficie, dove ε_0 è una funzione continua di a_0, θ', ϖ' e di ordine infinitesimo. Se la massa data si suppone divisa a strati infinitamente sottili, e ciascuno strato compreso fra due superficie simili alla (2), sarà

$$r = a\,(1+\varepsilon)$$

l'equazione di una di siffatte superficie. In questa ipotesi si ottiene

$$dr = (1+\varepsilon)\,da + a\frac{d\varepsilon}{da}\,da$$

per la spessezza di uno strato qualunque elementare. Quindi sostituendo nella (1) avremo

$$V_e = \sum_0^{\infty}{}_n \frac{1}{l^{n+1}}\int_0^{a_0}\int_0^{4\pi}\rho\left[(1+\varepsilon)^{n+3}\,a^{n+2} + (1+\varepsilon)^{n+2}\,a^{n+3}\frac{d\varepsilon}{da}\right] da\, d\sigma.$$

Sviluppando le potenze di $(1+\varepsilon)$, e rigettando i termini moltiplicati per le potenze di ε superiori alla prima, questa equazione diventa

$$V_e = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{1}{l^{n+1}} \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \rho a^{n+2}\, Y_n\, da\, d\sigma$$

$$+ \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{1}{l^{n+1}} \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot \varepsilon a^{n+3}}{da} Y_n\, da\, d\sigma,$$

poichè $\frac{d\varepsilon}{da}$ è dello stess' ordine di ε. Ma il primo di questi sommatori rappresenta lo sviluppo di

$$\int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \frac{\rho a^2\, da\, d\sigma}{\sqrt{l^2 - 2la\cos\theta' + a^2}},$$

che è il potenziale della massa raccolta nella sfera di raggio a_0. Dunque dinotando con $V_e^{(0)}$ questo potenziale troveremo

$$V_e = V_e^{(0)} + \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{1}{l^{n+1}} \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot \varepsilon^{n+3}}{da} Y_n\, da\, d\sigma \qquad (3).$$

Per un altro sferoide pieno della stessa materia, e terminato dalla superficie dell' equazione

$$r'_1 = a_1(1+\varepsilon'_1) \qquad (4)$$

il potenziale relativo allo stesso punto esterno è

$$V'_e = V_e^{(0)\prime} + \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{1}{l^{n+1}} \int_0^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot \varepsilon' a^{n+3}}{da} Y_n\, da\, d\sigma.$$

Quindi il potenziale di una massa compresa tra le superficie (2) e (4), quando sono concentriche le sfere ad esse inscritte, è dato dall' equazione

$$U_e = U_e^{(0)} + \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{1}{l^{n+1}} \left[\int_0^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot \varepsilon' a^{n+3}}{da} Y_n\, da\, d\sigma - \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot \varepsilon^{n+3}}{da} Y_n\, da\, d\sigma\right] \qquad (5),$$

20.° Supponiamo adesso che lo sferoide continui ad esser limitato dalle superficie (2) e (4), ma che il punto attirato (α, β, γ) si trovi nel vano della superficie interna che porremo esser la (2). Siccome il valore inverso di D in questa ipotesi è dato dall' equazione

$$\frac{1}{D} = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{l^n Y_n}{r^{n+1}},$$

così pel corrispondente potenziale avremo

$$U_i = \sum_0^\infty {}_n\, l^n \int_{r_0}^{r'_1}\int_0^{4\pi} \frac{\rho\, Y_n}{r^{n-1}}\, dr\, d\sigma = \sum_0^\infty {}_n\, l^n \left[\int_0^{r'_1}\int_0^{4\pi} \frac{\rho\, Y_n}{r'^{n-1}}\, dr'\, d\sigma - \int_0^{r_0}\int_0^{4\pi} \frac{\rho\, Y_n}{r^{n-1}}\, dr\, d\sigma\right]$$

Ma dall'equazione $r = a\,(1+\varepsilon)$ si trae agevolmente

$$\frac{dr}{r^{n-1}} = a^{-n+1}\, da + \frac{d}{da}\cdot \varepsilon a^{-n+2}\, da;$$

onde sostituendo avremo

$$U_i = \sum_0^\infty {}_n\, l^n \left[\int_0^{a_1}\int_0^{4\pi} \frac{\rho Y_n}{a^{n-1}}\, da\, d\sigma - \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \frac{\rho Y_n}{a^{n-1}}\, da\, d\sigma\right]$$

$$+ \sum_0^\infty {}_n\, l^n \left[\int_0^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d\cdot \varepsilon' a^{-n+2}}{da}\, da\, d\sigma - \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d\cdot \varepsilon a^{-n+2}}{da}\, da\, d\sigma\right].$$

Se dunque si osserva che il primo sommatorio è lo sviluppo del potenziale dello strato compreso fra le due sfere concentriche di raggio a_0, a_1, sarà

$$U_i = U_i^{(0)} + \sum_0^\infty {}_n\, l^n \left[\int_0^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d\cdot \varepsilon' a^{-n+2}}{da}\, da\, d\sigma - \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d\cdot \varepsilon a^{-n+2}}{da}\, da\, d\sigma\right] \quad (6)$$

21.° Il potenziale di una massa rinchiusa tra le due superficie (2) o (4) rispetto ad un punto, che faccia parte della massa medesima, si ottiene agevolmente dalle cose dette finora. Di fatti per questo punto si faccia passare la superficie dell'equazione

$$R_1 = l\,(1 + E_1),$$

e la sfera di raggio l inscritta a questa superficie sia concentrica alle precedenti: è chiaro che il potenziale della massa compresa fra questa superficie e la (2) si ha dall'equazione

$$U_e = U_e^{(0)} + \sum_0^\infty {}_n\, \frac{1}{l^{n+1}} \left[\int_0^{l}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d\cdot E a^{n+3}}{da}\, da\, d\sigma - \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d\cdot \varepsilon a^{n+3}}{da}\, da\, d\sigma\right],$$

ed il potenziale dell'altra parte della massa compresa fra la medesima superficie $R_1 = l\,(1 + E_1)$ e la superficie esterna (4) dello sferoide è dato dalla equazione

$$U_i = U_i^{(0)} + \sum_0^\infty {}_n\, l^n \left[\int_0^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d\cdot \varepsilon' a^{-n+2}}{da}\, da\, d\sigma - \int_0^{l}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d\cdot E a^{-n+2}}{da}\, da\, d\sigma\right].$$

Addizionando queste due equazioni, e ponendo per compendio di scrittura

$$U = U_e + U_i; \qquad U^{(0)} = U_e^{(0)} + U_i^{(0)},$$

troveremo pel potenziale richiesto

$$\left.\begin{aligned} U=U^{(0)}+\sum_0^\infty{}_n \frac{1}{l^{n+1}}\left[\int_0^l\int_0^{4\pi}\rho Y_n\frac{d\cdot Ea^{n+3}}{da}da\,d\sigma-\int_0^{a_0}\int_0^{4\pi}\rho Y_n\frac{d\cdot\varepsilon a^{n+3}}{da}da\,d\sigma\right]\\ +\sum_0^\infty{}_n l^n\left[\int_0^{a_1}\int_0^{4\pi}\rho Y_n\frac{d\cdot\varepsilon' a^{-n+2}}{da}da\,d\sigma-\int_0^l\int_0^{4\pi}\rho Y_n\frac{d\cdot Ea^{-n+2}}{da}da\,d\sigma\right]. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Se lo sferoide è pieno può supporsi $a_0 = 0$; e siccome E è funzione arbitraria di a, θ', ϖ', così potrà determinarsi per modo che sia $E=\varepsilon'$, e quindi la (2) diventa

$$U = U^{(0)} + \sum_0^\infty \frac{1}{l^{n+1}}\int_0^l\int_0^{4\pi}\rho Y_n\frac{d\cdot\varepsilon' a^{n+3}}{da}da\,d\sigma + \sum_0^\infty{}_n l^n\int_l^{a_1}\int_0^{4\pi}\rho Y_n\frac{d\cdot\varepsilon' a^{-n+2}}{da}da\,d\sigma \quad (8).$$

E se lo sferoide è limitato dalle superficie (2) e (4), e la superficie che passa pel punto attirato si suppone essere la sfera di raggio l, essendo $E = 0$, viene

$$U = U^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n l^n\int_l^{a_1}\int_0^{4\pi}\rho Y_n\frac{d\cdot\varepsilon' a^{-n+2}}{da}da\,d\sigma - \sum_0^\infty{}_n\frac{1}{l^{n+1}}\int_0^{a_0}\int_0^{4\pi}\rho Y_n\frac{d\cdot\varepsilon a^{-n+2}}{da}da\,d\sigma \quad (9).$$

Vogliamo far notare che questa formola non è punto meno generale della (7).

22.° Il procedimento, che deve seguirsi per ottenere gl' integrali contenuti in tutte le precedenti equazioni, non differisce sostanzialmente da quello che si è adottato nel capitolo precedente. Imperocchè essendo ρ, ε', ε funzioni finite e continue di a, θ', ϖ', tali pure saranno i prodotti

$$\rho\left(a\frac{d\varepsilon'}{da}+(n+3)\,\varepsilon'\right),\qquad \rho\left(a\frac{d\varepsilon'}{da}-(n-2)\,\varepsilon'\right)$$

$$\rho\left(a\frac{d\varepsilon}{da}+(n+3)\,\varepsilon\right),\qquad \rho\left(a\frac{d\varepsilon}{da}-(n-2)\,\varepsilon\right).$$

Supponendo dunque in generale

$$\rho\left(a\frac{d\zeta}{da}+p\zeta\right)=\sum_0^\infty{}_s F_s(a,\theta',\varpi'),$$

dove F_s è il simbolo delle funzioni sferiche, si ha primamente da questa equazione

$$\int_{a'}^{a''}\int_0^{4\pi}\rho\left(a\frac{d\zeta}{da}+p\zeta\right)a^q\,Y_n\,da\,d\sigma=\int_{a'}^{a''}\int_0^{4\pi}F_n Y_n\,a^q\,da\,d\sigma$$

avvertendo a quanto è stato dimostrato nel n.° 10 del secondo capitolo; e quindi

ogni integrale doppio nell'equazioni sinora trovato può essere sostituito da un integrale della forma

$$\int_{a'}^{a''}\int_0^{4\pi} F_n Y_n a^q \, da \, d\sigma. \tag{10}$$

Ora se dinotiamo cón ζ_0 ciò che diventa ζ quando alle variabili θ', ϖ' sostituiamo λ. ϑ, o con Y'_n ciò che diventa Y_n quando in questa funzione a θ, ϖ, θ', ϖ' si sostituiscono rispettivamente θ', ϖ', λ, ϑ, sarà come altrove è stato dimostrato

$$F_n(a, \theta', \varpi') = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \rho \left(a\frac{d\zeta_0}{da} + p\zeta_0\right) Y'_n \, d\sigma.$$

Laondo avvertendo che

$$Y'_n = 2\sum_0^n{}_s (-)^s \left(D_n^{(s)} C'_n{}^{(s)} + T_n^{(s)} S'_n{}^{(s)}\right),$$

se per brevità di scrittura si pone

$$A_n^{(s)} = \int_0^{4\pi} \rho \left(a\frac{d\zeta_0}{da} + p\zeta_0\right) D_n^{(s)} \, d\sigma$$

$$B_n^{(s)} = \int_0^{4\pi} \rho \left(a\frac{d\zeta_0}{da} + p\zeta_0\right) T_n^{(s)} \, d\sigma$$

troveremo

$$F_n(a, \theta', \varpi') = \frac{2n+1}{2\pi}\sum_0^n{}_s (-)^s \left(A_n^{(s)} C'_n{}^{(s)} + B_n^{(s)} S'_n{}^{(s)}\right).$$

Se questo valore si sostituisce nell'integrale (10), e per Y_n si pone il suo valore

$$2\sum_0^n{}_\nu (-)^\nu \left(C_n^{(\nu)} C'_n{}^{(\nu)} + S_n^{(\nu)} S'_n{}^{(\nu)}\right)$$

trovato nel capitolo precedente, risulta che ogni integrale delle precedenti equazioni può trasformarsi in un altro della forma

$$(2n+1)\sum_0^n b_n^{(\nu)} \left(C_n^{(\nu)} \int_{a'}^{a''} A_n^{(\nu)} a^q \, da + S_n^{(\nu)} \int_{a'}^{a''} B_n^{(\nu)} a^q \, da\right)$$

I valori di $b_n^{(\nu)}$, $C_n^{(\nu)}$, $S_n^{(\nu)}$ sono quelli stessi del n.° 14.°

23.° Quando z' e z sono indipendenti dalla variabile a, e ρ è funzione della sola a senza θ' e ϖ', le trovate espressioni del potenziale possono notabilmente semplificarsi. Imperocchè in questa ipotesi si ha

$$\int_{a'}^{a''}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d \cdot \zeta a^q}{da} \, da \, d\sigma = \int_{a'}^{a''} \rho d \cdot a^q \int_0^{4\pi} \zeta \, Y_n \, d\sigma,$$

dinotando ζ una qualunque delle funzioni z', z. Ma

$$\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)\int_0^{4\pi} \zeta Y_n \, d\sigma = F_n(\theta, \varpi);$$

onde avremo

$$\int_{a'}^{a''}\int_0^{4\pi} \rho Y_n \frac{d \cdot \zeta a^q}{da} \, da \, d\sigma = \frac{4\pi F_n}{2n+1}\int_{a'}^{a''} \rho d \cdot a^q.$$

In seguito di questa relazione le (8) e (9) diventano

$$\left.\begin{aligned} U &= U^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi l^n F'_n}{2n+1}\int_l^o \rho d \cdot a^{-n+2} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi F_n}{(2n+1)\, l^{n+1}}\int_0^l \rho d \cdot a^{n+3} \\ U &= U^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi l^n F'_n}{2n+1}\int_0^{a'} \rho d \cdot a^{-n+2} - \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi F_n}{(2n+1)\, l^{n+1}}\int_0^{a_0} \rho d \cdot a^{n+3} \end{aligned}\right\} \quad (11),$$

dove F_n, F'_n sono le funzioni sferiche che si riferiscono agli sviluppi di z e z'. Così pure l'equazioni (5) e (6) diventano

$$\left.\begin{aligned} U_e &= U_e^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi}{(2n+1)\, l^{n+1}}\left[F'_n \int_0^{a_1} \rho d \cdot a^{n+3} - F_n \int_0^{a_0} \rho \, d \cdot a^{n+3}\right] \\ U_i &= U_i^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi l^n}{2n+1}\left[F'_n \int_0^{a_1} \rho d \cdot a^{-n+2} - F_n \int_0^{a_0} \rho d \cdot a^{-n+2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

E quest'equazioni poi si cangiano in

$$\left.\begin{aligned} U &= U^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi\rho}{2n+1}\left[\frac{l^n F'_n}{a_1^{\,n-2}} - (F'_n - F_n)\, l^2\right] \\ U &= U^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi\rho}{2n+1}\left[\frac{l^n F'_n}{a_1^{\,n-2}} - \frac{a_0^{\,n+3} F_n}{l^{n+1}}\right] \\ U_e &= U_e^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi\rho}{2n+1}\left[\frac{a_1^{\,n+3} F'_n - a_0^{\,n+3} F_n}{l^{n+1}}\right] \\ U_i &= U_i^{(0)} + \sum_0^\infty{}_n \frac{4\pi\rho\, l^n}{2n+1}\left[\frac{F'_n}{a_1^{\,n-2}} - \frac{F_n}{a_0^{\,n-2}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (13),$$

allorchè ρ è costante.

24.° La massa μ del proposto sferoide è data dall'equazione

$$\mu = \int_0^{r'_1} \int_0^{4\pi} \rho r'^2 \, dr' \, d\sigma - \int_0^{r_0} \int_0^{4\pi} \rho r^2 \, dr \, d\sigma.$$

E poichè dall'equazione $r = a(1 + \varepsilon)$ ricavasi

$$r^2 dr = a^2 da + \frac{d \cdot \varepsilon a^3}{da} da,$$

è chiaro che sostituendo questo valore di $r^2 dr$ e l'analogo di $r'^2 dr'$ nella espressione di μ troveremo

$$\mu = \int_{a_0}^{a_1} \int_0^{4\pi} \rho a^2 da + \int_0^{a_1} \int_0^{4\pi} \rho \frac{d \cdot \varepsilon' a^3}{da} da \, d\sigma - \int_0^{a_0} \int_0^{4\pi} \rho \frac{d \cdot \varepsilon a^3}{da} da \, d\sigma.$$

Ora poichè i raggi delle sfere inscritte alle superficie che limitano la massa μ sono arbitrari, se li determiniamo per modo che risulti

$$\mu = \int_{a_0}^{a_1} \int_0^{4\pi} \rho a^2 da,$$

avremo dalla precedente equazione

$$\int_0^{a_1} \int_0^{4\pi} \rho \frac{d \cdot \varepsilon' a^3}{da} da \, d\sigma - \int_0^{a_0} \int_0^{4\pi} \rho \frac{d \cdot \varepsilon a^3}{da} da \, d\sigma = 0 \qquad (14).$$

Pongasi adesso

$$\rho \left(a \frac{d\zeta}{da} + 3\zeta \right) = \sum F_n (a, \theta', \varpi')$$

ed osservando che $Y_0 = 1$, avremo

$$\int_0^{4\pi} \rho \left(a \frac{d\zeta}{da} + 3\zeta \right) d\sigma = \int_0^{4\pi} \rho \left(a \frac{d\zeta}{da} + 3\zeta \right) Y_0 \, d\sigma = \int_0^{4\pi} F_0 \, d\sigma.$$

In seguito di ciò la (14) diventa

$$\int_0^{a_1} \int_0^{4\pi} F'_0 \, a^2 \, da \, d\sigma - \int_0^{a_0} \int_0^{4\pi} F_0 \, a^2 \, da \, d\sigma = 0;$$

ed essendo F'_0, F_0 indipendenti fra di loro, è mestieri che abbiasi $F'_0 = 0$, $F_0 = 0$. Dunque in tutto le precedenti equazioni il sommatorio $\sum_0^\infty {}_n$ può esser sostituito dal sommatorio $\sum_1^\infty {}_n$.

25.° Consideriamo adesso l'integrale $\int Y_1 \, d\mu'$ esteso a tutta la massa μ' dell'eccesso sferoidale sullo strato sferico (a_0, a_1). Essendo Y_1 proporzionale al trinomio

$$\alpha \operatorname{sen} \theta' \cos \varpi' + \beta \operatorname{sen} \theta' \operatorname{sen} \varpi' + \gamma \cos \theta',$$

anche l'integrale $\int Y_1 d\mu'$ sarà proporzionale al trinomio

$$\frac{\alpha}{a}\int r \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi' d\mu' + \frac{\beta}{a}\int r \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi' d\mu' + \frac{\gamma}{a}\int r \cos\theta' d\mu',$$

quando si trascurano gl'infinitesimi di ordini superiori al primo. Allorchè il centro di gravità dello eccesso sferoidale coincide con l'origine delle coordinate, cioè col centro comune delle due sfere a_0, a_1, sono nulli i tre integrali

$$\int r \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi' d\mu', \qquad \int r \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi' d\mu', \qquad \int r \cos\theta' d\mu';$$

e quindi anche $\int Y_1 d\mu'$ è nullo. Questo però, generalmente parlando non succede, ma avviene prossimamente quando ρ è funzione della sola variabile a, e z, z' non contengono che le sole variabili θ', ϖ'. In questo caso adunque possiamo ritenere che $\int Y_1 d\mu'$ è nullo quando l'integrazione si estende a tutti i punti dell'eccesso sferoidale. Ora si osservi che $d\mu' = \rho r^2 dr d\sigma$; e quindi se svanisce l'integrale $\int Y_1 d\mu'$, dovendo anche esser nulla la funzione

$$\int_0^{a_1}\int_0^{4\pi} Y_1 \rho \frac{d\cdot\varepsilon' a^3}{da} da d\sigma - \int_0^{a_0}\int_0^{4\pi} Y_1 \rho \frac{d\cdot\varepsilon a^3}{da} da d\sigma,$$

nel nostro caso avremo

$$\int_0^{a_1} \rho d\cdot a^3 \int_0^{4\pi} Y_1 \varepsilon' d\sigma - \int_0^{a_0} \rho d\ a^3 \int_0^{4\pi} Y_1 \varepsilon d\sigma = 0,$$

ovveramente

$$F'_1 \int_0^{a_1} \rho d\cdot a^3 - F_1 \int_0^{a_0} \rho d\cdot a^3 = 0$$

Da questa equazione si trae $F_1 = 0$, $F'_1 = 0$, essendo indipendenti tra loro F'_n e F_n. Dunque in tutte l'equazioni del n.° 23° al sommatorio $\sum_0^\infty{}_n$ si può sostituire $\sum_2^\infty{}_n$, rammentando quel che si è dimostrato nel precedente numero.

26.° Dinotino x, y, z le coordinate rettangolari di un punto qualunque dello sferoide computate su tre assi, che si tagliano nel suo centro di gravità, ed avremo per i tre momenti principali d'inerzia

$$A = \int (x^2 + y^2) d\mu, \qquad B = \int (x^2 + z^2) d\mu, \qquad C = \int (y^2 + x^2) d\mu.$$

Da quest'equazioni si trae

$$2C - A - B = \int \left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) d\mu = 3\int \left(\frac{r^2}{3} - z^2\right) d\mu;$$

e se invece delle coordinate rettangolari adoperiamo le coordinate polari r, θ', ϖ', essendo

$$x = r \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi', \qquad y = r \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi', \qquad z = r \cos\theta' \qquad (15),$$

avremo

$$2C - A - B = 3\iint \rho \left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta'\right) r^4\, dr\, d\sigma = 3\iint \rho Y_2^{(0)} r^4\, dr\, d\sigma \qquad (16).$$

Ora se poniamo $r = a(1+\varepsilon)$, troveremo agevolmente

$$2C - A - B = 3\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho Y_2^{(0)} a^4\, da\, d\sigma + 3\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot \varepsilon a^5}{da} Y_2^{(0)}\, da\, d\sigma.$$

Supponendo ρ funzione della sola variabile a, si ha

$$\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho Y_2^{(0)} a^4\, da\, d\sigma = \int_{a_0}^{a_1} \rho a^4\, da \int_0^{4\pi} Y_2^{(0)}\, d\sigma:$$

e siccome $\int_0^{4\pi} Y_2^{(0)}\, d\sigma$ è nullo, così la (16) si traduce in

$$2C - A - B = 3\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot \varepsilon a^5}{da} Y_2^{(0)}\, da\, d\sigma.$$

Ciò posto, se per ε sostituiamo il suo sviluppo

$$F_0 + \sum_1^{\infty}{}_n F_n$$

in funzioni sferiche, essendo $\int_0^{4\pi} F_s Y_2^{(0)}\, d\sigma = 0$ per tutti i valori di s diversi dal numero 2, otterremo

$$2C - A - B = 3\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot F_2 a^5}{da} Y_2^{(0)}\, da\, d\sigma \qquad (17).$$

Ora consideriamo l'equazioni

$$\int xy\, d\mu_1 = 0, \qquad \int zx\, d\mu_1 = 0, \qquad \int yz\, d\mu_1 = 0$$

che hanno luogo quando gli assi d'inerzia di una massa μ_1 coincidono con gli assi delle coordinate rettangolari: sostituendo i valori (15) nelle precedenti equazioni, ed avvertendo che $d\mu_1 = \rho r^2\, dr\, d\sigma$, avremo

$$\left.\begin{aligned} &\int_{r_0}^{r_1}\int_0^{4\pi} \rho r^4 \operatorname{sen}^2\theta' \cos\varpi' \operatorname{sen}\varpi'\, dr\, d\sigma = 0 \\ &\int_{r_0}^{r_1}\int_0^{4\pi} \rho r^4 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi'\, dr\, d\sigma = 0 \\ &\int_{r_0}^{r_1}\int_0^{4\pi} \rho r^4 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi'\, dr\, d\sigma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (18).$$

Se $r_0 = a_0(1 + Y_2)$, $r_1 = a_1(1 + Y_2)$ sono le equazioni delle superficie che terminano la massa μ_1, le (18) diventano evidentemente

$$\frac{1}{2}\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho a^4 \operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen} 2\varpi'\, da\, d\sigma + \frac{1}{2}\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot a^5}{da} Y_2 \operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen} 2\varpi'\, da\, d\sigma = 0$$

$$\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho a^4 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi'\, da\, d\sigma + \int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot a^5}{da} Y_2 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi'\, da\, d\sigma = 0$$

$$\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho a^4 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi'\, da\, d\sigma + \int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \frac{d\cdot a^5}{da} Y_2 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi'\, da\, d\sigma = 0.$$

Ma gl'integrali

$$\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen} 2\varpi' \, d\sigma, \qquad \int_0^{4\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi' \, d\sigma, \qquad \int_0^{4\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi' \, d\sigma$$

sono nulli. Dunque avremo altresì

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{4\pi} Y_2 \operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen} 2\varpi' \, d\sigma = 0 \\ &\int_0^{4\pi} Y_2 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi' \, d\sigma = 0 \\ &\int_0^{4\pi} Y_2 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi' \, d\sigma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19).$$

Ma la funzione sferica F_2 generalmente parlando è della forma seguente

$$A_0\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta'\right) + B_0 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \cos\varpi' + C_0 \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varpi'$$
$$+ D_0 \operatorname{sen}^2\theta' \cos 2\varpi' + E_0 \operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen} 2\varpi'$$

dinotando A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 funzioni qualunque della variabile a. Laonde sostituendo nella (17) ed avvertendo alle (19) troveremo

$$2C - A - B = 3\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta'\right)^2 \frac{d \cdot A_0 a^5}{da} \, da \, d\sigma$$
$$+ 3\int_{a_0}^{a_1}\int_0^{4\pi} \rho \left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta'\right) \frac{d \cdot D_0 a^5}{da} \operatorname{sen}^2\theta' \cos 2\varpi' \, da \, d\sigma.$$

Da ultimo, essendo

$$\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta'\right)^2 d\sigma = -\frac{16\pi}{45}; \qquad \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta'\right) \operatorname{sen}^2\theta' \cos 2\varpi' \, d\sigma = 0,$$

si ottiene il seguente risultato dovuto a Laplace

$$2C - A - B = -\frac{16}{15}\pi \int_{a_0}^{a_1} \rho d \cdot A_0 a^5.$$